UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAT 361 - Pentaabiran Statistik

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam LIMA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah pembolehubah rawak dengan nilai jangkaan μ_i dan varians σ_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (i) Cari ungkapan untuk varians bagi Y, di mana $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (ii) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tertabur secara tak bersandar, tunjukkan bahawa $\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i)$.

   (iii) Jika $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ dalam (ii), cari nilai a_i yang meminimumkan $\mathrm{Var}(Y)$.

(50/100)

   (b) (i) Takrifkan fungsi penjana momen bagi pembolehubah rawak X.

   (ii) Biar X mempunyai taburan binomial dengan parameter n dan p. Dapatkan fungsi penjana momen bagi X dan tentukan min dan varians bagi X.

...2/-

(iii) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_r$ adalah pembolehubah rawak tak bersandar. Jika X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ mempunyai taburan binomial dengan parameter n_i dan p, tunjukkan $\sum_{i=1}^{r} X_i$ juga mempunyai taburan binomial.

(50/100)

2. (a) Biar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan pembolehubah rawak tak bersandar tertabur secara secaman dengan setiap satu mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}.$$

(i) Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian $Y_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$.

(ii) Jika $n = 5$, cari $E(Y_5)$.

(45/100)

(b) Biar X_1 dan X_2 mempunyai fungsi kebarangkalian tercantum

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} ke^{-x_1 - x_2} & 0 < x_1 < x_2 < \infty \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Tentukan nilai k supaya $f(x_1, x_2)$ adalah suatu fkk.

(ii) Cari fkk tercantum $T = X_1$ dan $U = X_1 + X_2$.

(iii) Cari fkk bagi U.

(55/100)

...3/-

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & 0 < x < \infty, \quad \theta > 0 \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

(i) Dapatkan penganggar kaedah momen bagi θ.

(ii) Dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(iii) Adakah kedua-dua penganggar ini suatu penganggar saksama bagi θ ?

(iv) Andaikan X sebagai suatu cerapan daripada taburan ini. Dapatkan satu kuantiti pangsi yang boleh digunakan untuk menghasilkan selang keyakinan bagi θ. Seterusnya, dapatkan satu selang keyakinan 90% bagi θ.

(60/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak bersaiz n daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

(i) Tunjukkan bahawa taburan ini adalah ahli bagi famili eksponen. Seterusnya dapatkan satu statistik cukup dan lengkap bagi θ.

(ii) Gunakan Teorem Lehmann-Scheffe bagi mendapatkan satu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi suatu fungsi θ.

(iii) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi penganggar saksama θ dan $\frac{1}{\theta}$.

(40/100)

4. (a) Nyatakan Lema Neyman-Pearson.

(10/100)

(b) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada taburan eksponen dengan min λ, iaitu

$$\begin{aligned} f(x;\lambda) &= \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x > 0,\ \lambda > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad \text{d.t.l.} \end{aligned}$$

Terbitkan satu rantau genting Neyman-Pearson bagi menguji $H_0: \lambda = \lambda_0$ melawan $H_a: \lambda = \lambda_1$ berdasarkan sampel rawak bersaiz n daripada taburan ini.

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada taburan $N(\theta, 1)$.
Tunjukkan bahawa ujian nisbah kebolehjadian bagi menguji $H_0: \theta = \theta_0$ $(\theta_0$ ditetapkan$)$, melawan $H_a: \theta \neq \theta_0$ akan menghasilkan ketaksamaan $|\overline{X} - \theta_0| \geq c$.
Adakah ujian ini merupakan ujian paling berkuasa secara seragam bagi H_0 melawan H_a?

(50/100)

5. (a) Nyatakan Teorem Batas Bawah Cramer-Rao dan Teorem Lehmann-Scheffe.

(20/100)

(b) Andaikan bahawa X mempunyai taburan seragam dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x \leq \theta \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

(i) Bagi satu sampel rawak bersaiz n daripada taburan ini, dapatkan satu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ. Berdasarkan penganggar ini, dapatkan satu penganggar saksama bagi θ.

(ii) Tunjukkan bahawa $T = \text{maks}\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ merupakan satu statistik cukup dan lengkap bagi θ.

(iii) Andaikan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ menandakan statistik tertib bagi suatu sampel rawak bersaiz 4 daripada taburan seragam ini. Nilai tercerap bagi Y_4 ialah y_4 dan kita tolak $H_0: \theta = 1$ dan terima $H_a: \theta \neq 1$ jika $y_4 \leq \frac{1}{2}$ atau $y_4 \geq 1$. Dapatkan fungsi kuasa $k(\theta)$, $\theta > 0$ bagi ujian ini.

(80/100)

- oooOooo -