UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MAT 320 - Persamaan Pembezaan II
MAT 322 - Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Dapatkan penyelesaian *unik* sistem persamaan linear homogen $\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}$ yang memenuhi syarat awal

$$\underset{\sim}{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{jika} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nyatakan *bentuk* penyelesaian khusus sistem persamaan

$$\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{g}(t) \quad \text{jika} \quad \underset{\sim}{g}(t) =$$

(i) $\begin{pmatrix} t^2 \\ e^{9t} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \cos 3t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} te^{-2t} \\ \sec t \end{pmatrix}$

(c) Dengan menggunakan kaedah ubahan parameter atau cara lain, buktikan bahawa jika $y''(x) + \pi^2 y(x) = g(x)$ dengan syarat $y(0) = y(1) = 0$, mempunyai penyelesaian pada selang $0 < x < 1$, maka

$$\int_0^1 g(x) \sin \pi x \, dx = 0$$

(100 markah)

...2/-

2. (a) Andaikan p, q dan r sebagai fungsi-fungsi nyata dan

$$L[y] = -\{p(x)y'(x)\}' + q(x)y(x).$$

Buktikan bahawa masalah Sturm-Liouville $L[y] = \lambda r(x)y(x)$ pada selang $a < x < b$ dengan kekangan $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$ dan $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$,

(i) mempunyai nilai-nilai eigen nyata sahaja, dan

(ii) jika ϕ_1 adalah fungsi eigen sepadanan dengan nilai eigen λ_1, dan ϕ_2 adalah fungsi eigen sepadanan dengan nilai eigen λ_2, dan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka

$$\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0.$$

(b) Nyatakan sebab, kenapa persamaan Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ pada selang $-1 < x < 1$ tidak digolongkan sebagai masalah Sturm-Liouville.

(c) Dapatkan nilai eigen dan fungsi eigen masalah nilai sempadan $(xy')' + \lambda\left(\frac{1}{x}\right)y = 0$ dengan kekangan $y(1) = y(e^{\pi}) = 0$.

(100 markah)

3. (a) Bagi persamaan pembezaan separa

$$2x^2 u_{xx} - 5xy\, u_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2x\, u_x + 2y\, u_y = 0$$

pada rantau $\{x \neq 0 \;\; , \;\; y \neq 0\}$,

(i) tentukan klasifikasi persamaan ini,

(ii) dapatkan persamaan cirian dan lengkung ciriannya,

(iii) perturunkan persamaan ini ke bentuk kanonikal dengan menggunakan transformasi $\xi = x^{1/2}y$ dan $\eta = x^2 y$,

(iv) dapatkan penyelesaian u yang memenuhi $u(x, 1) = 2x^2 - 6$ dan $u_y(x, 1) = 3 - x^2$.

...3/-

(b) Andaikan $u(x, t) = X(x)T(t)$, dengan $u(x, t)$ memenuhi persamaan pembezaan separa dan syarat-syarat awal-sempadan berikut:

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) \ , \ 0 < x < 4 \ , \ t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0 \ , \ t > 0$$

$$u(x, 0) = 8 - 2x \ , \ 0 < x < 4 \ .$$

(i) Dengan menggunakan σ sebagai pemalar pemisahan, nyatakan masalah nilai eigen bagi $X(x)$ dan persamaan pembezaan biasa bagi $T(t)$.

(ii) Selesaikan kedua-dua masalah yang dinyatakan di bahagian (i),

(iii) Tuliskan $u(x, t)$ sebagai hasil tambah penyelesaian formal yang memenuhi persamaan pembezaan separa dan syarat-syarat awal-sempadan yang telah diberikan.

(100 markah)

- oooOooo -