UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1995/96

Oktober/November 1995

MAT 320 - Persamaan Pembezaan II

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (i) Selesaikan sistem persamaan homogen $\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}$,

   (ii) Dapatkan penyelesaian am sistem persamaan $\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{g}$

   jika $\underset{\sim}{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Dengan menggunakan ubahan pembolehubah $y = x^{-\frac{1}{2}}v(x)$, dapatkan penyelesaian am persamaan Bessel, $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ x > 0.$ Seterusnya, dapatkan penyelesaian khusus persamaan $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{3/2}\sin x$ untuk $x > 0$ menggunakan kaedah ubahan parameter atau kaedah lain yang sesuai.

   [100/100]

2. (a) Pertimbangkan persamaan $2x^2y'' - xy' + \left(x^2 + 1\right)y = 0.$

   (i) Tunjukkan bahawa $x = 0$ adalah titik singular nalar,

   (ii) Dapatkan persamaan indeks, eksponen kesingularan dan hubungan jadi semula sepadanan dengan $x = 0$,

...2/-

(iii) Dapatkan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$, penyelesaian siri persamaan di atas, yang tak bersandar secara linear. (nyatakan sekurang-kurangnya 3 sebutan pertama tak sifar untuk setiap penyelesaian).

(iv) Buktikan bahawa y_1 dan y_2 yang diberikan di bahagian (iii) tak bersandar secara linear.

(b) Jika $\lambda > 0$ dan $\lambda \neq m\pi$ untuk $m = 1, 2, \ldots, N$, dapatkan penyelesaian am persamaan

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin m\pi x.$$

[100/100]

3. (a) Pertimbangkan persamaan Euler,

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \quad \text{pada selang } (0, \infty).$$

(i) Dengan menggunakan transformasi $x = e^z$, tunjukkan bahawa persamaan tersebut menjadi

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0.$$

(ii) Seterusnya, selesaikan persamaan

$$(x+1)^2 y'' + (x+1)y' - y = \ell n\,(x+1)^2 + x - 1, \quad \text{untuk } x > -1.$$

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan separa

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + e(x,y)u_x + f(x,y)u_y + g(x,y)u = F(x,y).$$

Nyatakan syarat ke atas $a(x, y)$, $b(x, y)$ dan $c(x, y)$ supaya persamaan pembezaan separa ini diklasifikasikan sebagai eliptik, parabolik atau hiperbolik pada titik (x, y).

[100/100]

4. Pertimbangkan $u(x, t)$ yang memenuhi persamaan gelombang $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ dengan syarat sempadan

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

serta syarat awal

$$u(x, 0) = x, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

bagi $0 \leq x \leq 1$ dan $t \geq 0$.

(a) Dengan mengandaikan $u(x, t) = X(x)T(t)$, tunjukkan bahawa $X(x)$ memenuhi persamaan pembezaan $X'' + \sigma X = 0$
dengan syarat sempadan $X(0) = X(b) = 0$,
dan $T(t)$ memenuhi $T'' + \alpha^2 \sigma T = 0$,
dengan σ sebagai pemalar pemisahan.

(b) Tunjukkan bahawa jika $\sigma \leq 0$, tidak terdapat penyelesaian tak remeh kepada persamaan pembezaan di bahagian (a).

(c) Tunjukkan jika $\sigma > 0$, persamaan pembezaan di bahagian (a) mempunyai penyelesaian tak remeh apabila $\sigma = \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(d) Dengan mengandaikan

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \left(c_n \sin n\pi\alpha t + k_n \cos n\pi\alpha t\right),$$

cari nilai c_n dan k_n. Seterusnya, berikan $u(x, t)$ yang tepat memenuhi persamaan gelombang dengan syarat sempadan dan syarat awal yang dinyatakan di atas.

[100/100]

- oooOOooo -