UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAT313 - Aljabar Moden 1

Tarikh: 29 Oktober 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Katakan R set semua nombor nyata, f adalah suatu fungsi daripada R kepada R yang ditakrifkan dengan

$$(x)f = \begin{cases} x - 1 & \text{jika} \quad x \geqslant 1 \\ x + 1 & \text{jika} \quad x < 1 \end{cases}$$

carilah $(x + 1)f$, $(x)(f \circ f)$.

(30/100)

(b) Katakan R set semua nombor nyata. $R^* = \{x \in R \mid x \neq -1\}$. Jika H adalah satu hubungan atas R^* yang ditakrifkan dengan $a H b \Leftrightarrow ab + a + b > -1$. Tentukan sama ada H refleksif, simetri, transitif. Carilah $\{[x]H \mid x \in R^*\}$.

(35/100)

(c) Berilah takrif bagi pilihatur. Katakan R set semua nombor nyata. Adakah fungsi $f : R \to R$ yang ditakrifkan dengan

$$(x)f = 2x + 1$$

suatu pilihatur atas R.

(25/100)

(d) Mudahkan $(123)(23)(34)(123)^{-1}$
dan $(123)^{-1}(234)^{-1}(123)(234)$

(10/100)

2. Buktikan bahawa

$$H = \{(a, b) \mid a, \text{ dan } b \text{ adalah nombor nyata}, \ a \neq 0\}$$

menjadi suatu kumpulan terhadap

.../2

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

Tunjukkan bahawa peringkat bagi (a, b) adalah 2 jika dan hanya jika $a = -1$.

Tunjukkan bahawa peringkat bagi $(1, 1)$ adalah takterhingga. Carilah set semua (x, y) yang memenuhi $(x, y) * (1, 1) = (1, 1) * (x, y)$,

(100/100)

3. (a) Katakan $<G *>$ suatu kumpulan. Buktikan bahawa $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ $\forall\, x, y \in G$. Buktikan bahawa $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ $\forall\, x, y \in G$ jika dan hanya jika $<G *>$ adalah abelan.

(30/100)

(b) Buktikan bahawa jika $\alpha \in S_n$ adalah genap maka α^{-1} adalah genap.

(10/100)

(c) Katakan $<G *>$ suatu kumpulan, $a, b \in G$. Buktikan bahawa jika $a^{-1} * b * a = b^{-1}$ dan $b^{-1} * a * b = a^{-1}$, maka $a^4 = b^4 = e$, di sini e adalah identiti.

(30/100)

(d) Katakan $<G *>$ suatu kumpulan, $a, b \in G$. Buktikan bahawa bagi sebarang integer m, n $a * b = b * a \Rightarrow a^m * b^n = b^n * a^m$.

(30/100)

4. (a) Berilah takrif bagi subkumpulan normal. Tunjukkan bahawa subkumpulan $<(1234)>$ bagi S_4 bukan subkumpulan normal bagi S_4.

(25/100)

(b) Katakan Q set semua nombor nisbah. Tunjukkan bahawa H yang ditakrifkan dengan

$$H = \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; a, n \text{ adalah integer}, \quad n > 0 \right\}$$

adalah subkumpulan bagi $<Q +>$.

Tentukan sama ada pernyataan-pernyataan

(i) $H + \frac{1}{4} = H + \frac{7}{12}$ (ii) $H + \frac{1}{14} = H + \frac{1}{6}$ benar atau tidak.

(20/100)

.../3

(c) Jika $H = \{(1), (12)\}$, senaraikan semua koset kanan di dalam S_3/H. Tentukan sama ada kesepadanan daripada S_3/H kepada S_3/H yang ditakrifkan dengan

$$Ha \to H((23)a)$$

menjadi suatu fungsi dari S_3/H ke S_3/H?

(25/100)

(d) Katakan H subkumpulan bagi $\langle G\ *\rangle$. Buktikan bahawa kesepadanan $H * a \to a^{-1} * H$ menjadi suatu fungsi dari $\{H * a \mid a \in G\}$ ke $\{a * H \mid a \in G\}$. Tunjukkan bahawa fungsi ini adalah satu ke satu dan keseluruh.

(30/100)

5\. (a) Berilah takrif bagi homomorfisme, Tentukan sama ada setiap fungsi yang ditakrifkan sebagai berikut menjadi homomorfisme dari $\langle I\ +\rangle$ ke $\langle R^*\ x\rangle$, di sini, I = set semua integer, R^* = set semua nombor nyata berlainan dengan sifar.

$(x)f = (-1)^x$

$(x)g = 3x$

$(x)h = 3^x$

(25/100)

(b) Berilah takrif bagi (i) gelanggang (ii) domain integer.

Berilah satu contoh bagi gelanggang yang tidak menjadi domain integer.

(20/100)

(c) Katakan $G = \langle a\rangle$ suatu kumpulan kitaran dan peringkat bagi $a = p$. Buktikan bahawa fungsi $f : G \to G$ yang ditakrifkan dengan

$$(x)f = x^i \quad \forall\, x \in G$$

menjadi isomorfisme dari G ke G jika dan hanya jika pembahagi sepunya terbesar bagi i dan p sama dengan satu.

(30/100)

(d) Nyatakan dan buktikan Teorem Lagrange.

(25/100)

- oooOOooo -