

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MAT 303 - Kalkulus Vektor

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Cari persamaan parameter garis yang melalui titik $(2, -1, 5)$ dan selari dengan garis $x = 3t$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.
- (b) Andaikan $A(1, 3, -2)$, $B(2, 4, 5)$, dan $C(-3, -2, 2)$. Cari luas segitiga dengan bucu-bucu pada A , B , dan C . Jika O ialah titik asalan, cari isipadu paralelepiped dengan sisi-sisi sebelah OA , OB , dan OC .
- (c) Cari vektor tangen unit dan vektor normal unit pada lengkung $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ di titik yang sepadan dengan $t = \pi/2$.
- (d) Andaikan lengkung L dicirikan oleh vektor kedudukan $\mathbf{r}(t)$. Vektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ disebut sebagai *vektor halaju*, dan $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ disebut sebagai *vektor pecutan*. Jika

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}$$

dengan $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$, \mathbf{T} vektor tangen unit, \mathbf{N} vektor normal unit, dan κ kurvatur, tunjukkan bahawa

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \kappa v^3 (\mathbf{T} \times \mathbf{N})$$

...2/-

Deduksikan bahwa

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}.$$

Seterusnya gunakan rumus di atas untuk mendapatkan kurvatur lengkung jika vektor kedudukan ialah $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$.

(100/100)

2. (a) Cari terbitan berarah $f(x, y, z) = \sqrt{10 - x^2 - y^2 - z^2}$ di titik $(1, 1, -2)$ dalam arah $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$.
- (b) Cari persamaan satah tangen pada permukaan $xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14$ di titik $(5, -2, 3)$.
- (c) Cari persamaan satah yang tangen kepada paraboloid $z = 2x^2 + 3y^2$ dan yang selari dengan satah $4x - 3y - z = 10$.
- (d) Dua permukaan disebut sebagai *berortogon* pada titik persilangan P jika garis-garis normal pada permukaan-permukaan tersebut di titik P adalah berortogon. Tunjukkan bahawa graf-graf $F(x, y, z) = 0$ dan $G(x, y, z) = 0$ adalah berortogon di titik P jika dan hanya jika

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

Tunjukkan sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dan kon $a^2 x^2 + b^2 y^2 - z^2 = 0$ adalah berortogon di setiap titik persilangan.

(100/100)

3. (a) Daya pada titik (x, y, z) ialah $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \mathbf{i} + e^y \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$. Cari kerja terbuat oleh \mathbf{F} pada lengkung $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dari $(0, 0, 0)$ ke $(2, 4, 8)$.

...3/-

- (b) Nilai kamiran garis $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ jika $\mathbf{F}(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$ dan L suatu lengkung ringkas dari $(2, -1, 3)$ ke $(4, 2, -1)$.
- (c) Andaikan S sebagai sempadan rantau yang dibatasi oleh paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ dan satah- xy . Cari fluks melalui S dalam arah normal unit terkeluar untuk medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xi + 2yj + 3k$.
- (d) Jika $\int_L M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ tak bersandar kepada lintasan, dan M, N , serta P mempunyai terbitan separa peringkat pertama yang selanjur, tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(100/100)

4. (a) (i) Nilai kamiran

$$\int_L xydx + (x + y)dy$$

jika L adalah sebahagian graf $y = x^2$ dari $(-1, 1)$ ke $(2, 4)$.

- (ii) Nilai kamiran $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ jika $\mathbf{F}(x, y, z) = yi - xj + zk$ dan L diberikan oleh $x = \sin t, y = \cos t, z = 2t, 0 \leq t \leq \pi$.

- (b) Gunakan Teorem Green untuk menilaikan kamiran

$$\oint_L (x^2 - y^2)dx + xy dy$$

jika L ialah sempadan rantau yang dibatasi oleh garis $y = x$ dan parabola $y = x^2$.

...4/-

- (c) Cari kamiran permukaan $\iint_S f(x, y, z) dS$ jika $f(x, y, z) = xyz$, dan S ialah permukaan satah $x + y + z = 1$ yang terletak di oktan pertama.
- (d) Gunakan Teorem Percapahan untuk menilaikan kamiran $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ jika $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + e^{-y} \sin z)\mathbf{i} + (x^2y + e^{-x} \cos z)\mathbf{j} + (\tan^{-1}xy)\mathbf{k}$, S permukaan rantau yang dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan satah $z = 9$, dan \mathbf{n} ialah vektor normal unit terkeluar pada S .

(100/100)