UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAT 302/MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana **LIMA** soalan.

1. (a) (i) Jika set $S=\{a,b,c\}$ dan set T adalah tak terhingga tetapi terbilangkan, tunjukkan bahawa set hasil darab $S\times T$ adalah terbilangkan.

(ii) Jika pernyataan berikut adalah benar buktikannya dan jika ia salah sangkalkannya dengan memberi satu contoh lawan.

"Jika set X adalah tak terbilangkan dan Y adalah suatu subset dari X yang tak terbilangkan, maka set $X\setminus Y$ adalah terbilangkan."

(45/100)

(b) Fungsi $f,\ g: R\to R$ adalah selanjar pada R.

(i) Adakah set

$$\left\{x\in R \,\middle|\, |f(x)|<2\right\}$$

terbuka atau tertutup? Berikan alasan.

Juga diberi $B\subset R$, $A=f^{-1}(B)$ dan jujukan $\{a_n\}$ bersifat $\{a_n\}\subset A$ dengan $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) Jika set B tertutup, tunjukkan $f(a)\in B$.

(iii) Jika $f(a_n)\geq g(a_n)$, $\forall\ n\in N$, tunjukkan bahawa $f(a)\geq g(a)$.

(55/100)

...2/-

2. (a) Katakan $S \subset R$ adalah terbatas dari bawah, $a > 0$ dan $aS = \{ as \mid s \in S \}$. Buktikan $\inf(aS) = a \inf S$.

Jika $a < 0$, adakah keputusan di atas masih benar? Berikan sokongan untuk jawapan anda.

(40/100)

(b) (i) $\{a_n\}$ merupakan suatu jujukan nombor nyata yang menumpu. Buktikan bahawa hadnya adalah unik.

(ii) Andaikan fungsi $f: R \to R$ selanjar pada R, $a \in R$ dan jujukan $\{b_n\}$ ditakrifkan sebagai $b_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahawa $\{b_n\}$ adalah suatu jujukan Cauchy.

(60/100)

3. (a) (i) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan dengan

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{8}(4a_n + 7), \quad n \geq 1.$$

Tunjukkan bahawa $a_n < \frac{7}{4}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Tunjukkan $\{a_n\}$ menokok.

Wujudkah $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$? Berikan alasan. Carinya jika wujud.

(ii) Buktikan pernyataan yang berikut jika ia benar dan sangkalkan dengan satu contoh lawan jika ia salah.

$\{b_n\}$ dan $\{c_n\}$ merupakan jujukan nombor nyata. Jika $\{b_n\}$ terbatas dan $\{c_n\}$ menumpu, maka jujukan $\{b_n c_n\}$ menumpu.

(65/100)

(b) Katakan fungsi f selanjar dan $f \geq 0$ pada selang $[a, b]$. Jika fungsi F ditakrifkan sebagai

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b],$$

tunjukkan bahawa fungsi F menokok pada $[a, b]$.

...3/-

Dengan ini, tentukan sama ada fungsi g yang ditakrifkan sebagai

$$g(x)=\int_0^x \frac{t}{5-\sqrt{t}}\,dt\ ,\quad x\in[0\ ,\ 10],$$

adalah menokok pada selang [0 , 10]?

(35/100)

4. (a) Diberi $A = [411\ ,\ \infty) \cup \left\{\frac{n}{1+n^2}\ |\ n\in \mathbb{N}\right\}$.

(i) Cari sup A dan inf A.
(ii) Cari A°.
(iii) Cari A'.
(iv) Adakah A set terbuka? Beri alasan.
(v) Jika B adalah set tertutup yang terkecil supaya $A \subset B$, cari set B.

(50/100)

(b) (i) Nyatakan teorem nilai min.
Dengan menggunakan teorem nilai min, dapatkan teorem Rolle.

(ii) Diberi fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terbezakan dan $g'(x) < 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
Tunjukkan g hanya boleh mempunyai satu titik tetap, jika ada.
(Titik tetap suatu fungsi g ialah nombor nyata a dengan $g(a) = a$).

(50/100)

5. (a) (i) Jika fungsi f terbezakan pada a, buktikan bahawa f selanjar pada a.
Adakah sebaliknya benar? Berikan alasan.

(ii) Jika pernyataan berikut adalah benar buktikannya dan jika ia salah sangkalkannya dengan memberikan satu contoh lawan.

"Jika f terbezakan pada selang S, maka f selanjar secara seragam pada S."

(iii) Dengan menggunakan takrif sifat selanjar secara seragam, tunjukkan bahawa fungsi $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ adalah selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(70/100)

...4/-

(b) (i) Buktikan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nx}}{n^3+4}$ menumpu secara seragam pada $[0, \infty)$.

(ii) Cari kamiran $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nx}}{n^3+4}\, dx$ dengan memberikan alasan.

(30/100)

6. (a) (i) Andaikan $f:\ [a,b] \to R$ menokok pada $[a, b]$ dan $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ merupakan petak pada $[a, b]$ dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, N$. Cari $A(P;f) - B(P;f)$. Dengan ini, buktikan f terkamirkan pada $[a, b]$.

(ii) Dengan menggunakan bahagian (i), tentukan sama ada fungsi $g(x) = \frac{\sin x}{10 - x^2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, terkamirkan pada selang $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Berikan alasan.

(55/100)

(b) (i) Katakan X, $Y \subset R$. Jika $X \subset Y$, buktikan bahawa $X^{\circ} \subset Y^{\circ}$.
Adakah akasnya benar, iaitu benarkah $X^{\circ} \subset Y^{\circ} \Rightarrow X \subset Y$?
Berikan alasan.

(ii) Bagi sebarang $A, B, C \subset R$, tunjukkan bahawa

$$(A \cap B \cap C)^{\circ} \subset A^{\circ} \cap B^{\circ} \cap C^{\circ}.$$

(45/100)

- oooOooo -