

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAT261 - Teori Kebarangkalian 1

Tarikh: 6 November 1987

Masa: 9.00 pagi. 12.00 t/hari.
(3 jam)

Jawab KELIMA-LIMA soalan.

1. (a) Katakan A, B dan C adalah tiga peristiwa.

(i) Jika A, B dan C adalah saling eksklusif tunjukkan bahawa $P(A \cup B \cup C|D) = P(A|D) + P(B|D) + P(C|D)$.

(ii) Tunjukkan bahawa $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

(iii) Tentukan $P(A)$, $P(B)$ dan $P(C)$ jika keempat-empat syarat berikut dipenuhi

(1) A, B dan C adalah saling tak bersandar

$$(2) P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$(3) P(B \cap \bar{C}) = \frac{1}{2} P(A)$$

$$(4) P(B) = \frac{1}{3P(C)}$$

(40/100)

(b) Pasu A mengandungi 4 biji bola merah, 3 biji kubus putih dan 3 biji kubus merah. Pasu B mengandungi 1 biji bola merah, 1 biji kubus merah dan 2 biji kubus putih.

Dua buah objek dipilih tanpa gantian daripada pasu A dan sebuah objek dipilih daripada pasu B.

Pertimbangkan peristiwa-peristiwa berikut:

M: tepat satu daripada objek-objek yang dicabut adalah merah.

K: tepat dua daripada objek-objek yang dicabut adalah kubus.

(i) Kirakan $P(M)$

(ii) Kirakan $P(M \cap K)$

(iii) Jika tepat dua biji kubus putih telah terpilih apakah kebarangkalian bahawa kedua-dua kubus tersebut dicabut daripada pasu A.

(60/100)

.../2

2. (a) Katakan X mempunyai taburan Binomial dengan parameter n dan $p = \frac{1}{2}$ dan Y adalah $\frac{X}{n}$. Diberikan $P(0.4 < Y < 0.6)$ adalah sekurang-kurangnya 0.90. Tentukan nilai n dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev.

(30/100)

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi p.r. X adalah diberi seperti berikut:

$$f(x) = \begin{cases} c(\ln \alpha^2)\alpha^x & , x < 0 \\ cx & , 0 \leq x \leq 1 \\ c(\ln \alpha)\alpha^{1-x} & , x > 1 \end{cases}$$

di sini α adalah suatu pemalar, $\alpha > 0$

Tentukan

- (i) nilai c
- (ii) fungsi taburan longgokan bagi p.r. X
- (iii) jangkaan untuk p.r. X

(30/100)

- (c) Katakan pembolehubah rawak bivariat (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1 \\ & 2y \leq x \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Berikan:

- (i) f.k.k sut untuk p.r. X dan f.k.k sut untuk p.r. Y
- (ii) f.k.k bersyarat $h_2(y|x)$
- (iii) fungsi taburan longgokan tercantum, $F(x, y)$
- (iv) $\Pr(Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{2})$
- (v) Adakah X dan Y tak bersandar.

(40/100)

3. (a) Katakan X mempunyai taburan Poisson dengan parameter λ .

- (i) Kirakan jangkaan untuk $(1 + X)^{-1}$
- (ii) Cari nilai $w(t)$ jika $w(t) = E(Xe^{tX})$
- (iii) Gunakan $w(t)$ di dalam (ii) untuk mencari varians untuk X.

(30/100)

.../3

2. (a) Katakan X mempunyai taburan Binomial dengan parameter n dan $p = \frac{1}{2}$ dan Y adalah $\frac{X}{n}$. Diberikan $P(0.4 < Y < 0.6)$ adalah sekurang-kurangnya 0.90. Tentukan nilai n dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev.

(30/100)

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi p.r. X adalah diberi seperti berikut:

$$f(x) = \begin{cases} c(\ln \alpha^2)\alpha^x & , x < 0 \\ cx & , 0 \leq x \leq 1 \\ c(\ln \alpha)\alpha^{1-x} & , x > 1 \end{cases}$$

di sini α adalah suatu pemalar, $\alpha > 0$

Tentukan

- (i) nilai c
- (ii) fungsi taburan longgokan bagi p.r. X
- (iii) jangkaan untuk p.r. X

(30/100)

- (c) Katakan pembolehubah rawak bivariat (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8} & 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1 \\ & 2y \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Berikan:

- (i) f.k.k. sut untuk p.r. X dan f.k.k. sut untuk p.r. Y
- (ii) f.k.k. bersyarat $h_2(y|x)$
- (iii) fungsi taburan longgokan tercantum, $F(x, y)$
- (iv) $\Pr(Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{2})$
- (v) Adakah X dan Y tak bersandar.

(40/100)

3. (a) Katakan X mempunyai taburan Poisson dengan parameter λ ,

- (i) Kirakan jangkaan untuk $(1 + X)^{-1}$
- (ii) Cari nilai $w(t)$ jika $w(t) = E(Xe^{tX})$
- (iii) Gunakan $w(t)$ di dalam (ii) untuk mencari varians untuk X.

(30/100)

- (b) X dan Y adalah dua pembolehubah rawak yang tak bersandar. X bertaburan negatif binomial dengan parameter r_1 dan p manakala Y bertaburan negatif binomial dengan parameter r_2 dan p.

(i) Cari f.k.k bagi p.r. $X + Y$.

(ii) Berikan f.k.k bersyarat bagi X diberi $X + Y$.

(40/100)

- (c) Katakan f.k.k tercantum bagi p.r. (X, Y) adalah diberi sebagai:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y}, & -y \leq x \leq y, y > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain.} \end{cases}$$

Nilaikan

(i) pemalar c

(ii) $E(Y|X)$

(iii) $\text{Var}(Y|X)$

(iv) $\rho_{X,Y}$

(30/100)

4. (a) Katakan suatu p.r. X mempunyai f.k.k seperti berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain.} \end{cases}$$

- (i) Tunjukkan bahawa momen ke k untuk p.r. X adalah

$$\frac{2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

- (ii) Dengan menggunakan (i), cari $E(X)$ dan $\text{Var}(X)$.

- (iii) Berikan f.k.k untuk p.r. $Y = \ln X$.

(40/100)

- (b) Pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

.../4

- (i) Dapatkan suatu f.k.k untuk p.r. $Y = \frac{X^2}{\sigma^2}$ dan camkan bentuk taburannya.
- (ii) Katakan Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah sampel rawak saiz n daripada suatu populasi yang mempunyai taburan secaman dengan f.k.k Y di bahagian 4b (i).
Terbitkan taburan bagi $V = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ dan camkan bentuk taburan V .
- (iii) Jika diketahui X dan V adalah tak bersandar dan $T = \frac{\frac{X}{\sigma}}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$, cari $E(T)$ dan $Var(T)$.

(60/100)

5. (a) Katakan p.r. X mempunyai f.k.k berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{di tempat lain,} \end{cases}$$

Katakan p.r. Y mempunyai f.k.k berikut:

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Anggapkan X dan Y tak bersandar, tentukan

- (i) f.k.k tercantum bagi $U = X + Y$ dan $V = X - Y$.
- (ii) f.k.k sut bagi p.r. U .
- (iii) Adakah U dan V saling tak bersandar.

(40/100)

(b) P.r. bivariat (X, Y) tertabur secara seragam atas suatu rantau yang dibatasi oleh persamaan-persamaan $y^2 = x + 2$ dan $y = x$. Tentukan:

- (i) f.k.k tercantum bagi p.r. X dan Y .
- (ii) f.k.k sut bagi p.r. X .
- (iii) f.k.k sut bagi p.r. Y .

(30/100)

(c) Katakan $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ menandakan statistik tertib bagi suatu sampel rawak yang bersaiz 5 daripada suatu taburan dengan f.k.k:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Dapatkan f.k.k bagi $Z = Y_5 - Y_1$.

(30/100)

- ooo0ooo -