

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1995/96

Mac/April 1996

MAT 221 - Persamaan Pembezaan I

Masa : [3 jam]

Jawab semua **EMPAT** soalan.

1. (a) Tentukan fungsi  $N(x, y)$  supaya persamaan berikut tepat.

$$(x^{-2}y^{-2} + xy^{-3})dx + N(x, y)dy = 0$$

(30/100)

- (b) Selesaikan persamaan Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + 2y = xy^{-2}$$

(30/100)

- (c) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

- (i) Tentukan suatu rantau pada satah  $xy$  di mana persamaan mempunyai penyelesaian unik melalui satu titik  $(x_0, y_0)$  dalam rantau tersebut.
- (ii) Terangkan mengapa  $y = \tan x$  bukan suatu penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

pada selang  $(-2, 2)$  tetapi merupakan suatu penyelesaian pada selang  $(-1, 1)$ .



(40/100)

.../2

2. (a) Pertimbangkan suatu persamaan pembezaan dalam bentuk

$$[y + xf(x^2 + y^2)]dx + [yf(x^2 + y^2) - x]dy = 0$$

- (i) Tunjukkan bahawa  $1/(x^2 + y^2)$  adalah suatu faktor pengamir bagi persamaan di atas.

- (ii) Selesaikan

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]dy = 0$$

(30/100)

- (b) Satu penyelesaian bagi persamaan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

diberi oleh  $(1+x)^2$  dan Wronskian bagi sebarang dua penyelesaian persamaan ini adalah satu pemalar. Selesaikan persamaan ini.

(40/100)

- (c) Dapatkan satu rumus bagi ralat rumus setempat  $e_n$  dalam sebutan  $x$  dan penyelesaian tepat  $\phi$  jika kaedah Euler digunakan bagi masalah nilai awal

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

(30/100)

3. (a) Selesaikan  $(D^2 - 6D + 9)y = e^{3x}/x^2$  diberikan  $D = \frac{d}{dx}$ .

(30/100)

- (b) Tentukan bentuk penyelesaian khusus bagi

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x} \cos x$$

(30/100)

.../3

- (c) Dapatkan dua penyelesaian siri kuasa tak bersandar linear dalam  $x$  bagi persamaan Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

di mana  $\lambda$  adalah suatu pemalar.

(40/100)

4. (a) Pertimbangkan sistem  $X' = AX$  bagi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (i) Tunjukkan bahawa persamaan cirian bagi  $A$  mempunyai punca berulang hanya jika  $(a - d)^2 + 4bc = 0$ .
- (ii) Tunjukkan bahawa jika  $a \neq d$  dan jika  $(a - d)^2 + 4bc = 0$ , maka penyelesaian am bagi sistem tersebut ialah

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2b \\ d - a \end{pmatrix} e^{1/2(a+d)t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 2b \\ d - a \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{1/2(a+d)t}.$$

- (iii) Bincangkan penyelesaian bagi kes

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \quad \text{and} \quad a = d$$

(40/100)

- (b) Tentukan bentuk vektor penyelesaian khusus  $X_p$  bagi

$$\frac{dx}{dt} = x - 4y + 4t + 9e^{6t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + y - t + 6e^{6t}$$

(30/100)

- (c) Persamaan pembezaan bagi suatu litar elektrik yang mempunyai suatu induktans  $L$ , suatu rintangan  $R$ , suatu kondenser dengan kapasitans  $C$ , dan suatu daya gerak elektrik  $E(t)$  (lihat Rajah 1) diberikan oleh

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t) \tag{1}$$

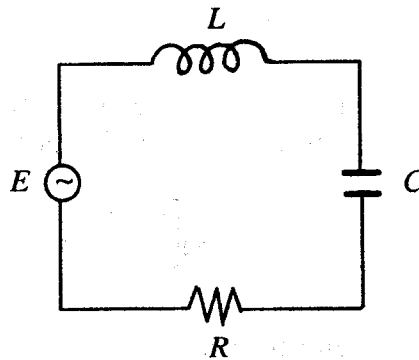
.../4

- (i) Dengan menggunakan  $i = \frac{dq}{dt}$ , tunjukkan bahawa per (1) menjadi

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) \quad (2)$$

di mana cas  $q = q(t)$  dan arus  $i = \frac{dq}{dt}$  boleh diperolehi.

- (ii) Suatu litar terdiri daripada suatu induktans 0.05 henry, suatu rintangan 20 ohms, suatu kondenser dengan kapasitans 100 microfarads dan suatu emf  $E = 100$  volts. Dapatkan  $i$  dan  $q$ , diberikan syarat awal  $q = 0$ ,  $i = 0$  bila  $t = 0$ .



Rajah 1

(30/100)