UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAT220 - Persamaan Pembezaan I

Tarikh: 26 Oktober 1987 Masa: 2.15 ptg. - 5.15 ptg. (3 jam)

Jawab semua soalan.

1. (a) Pertimbangkan

$$y' + p(x)y = q(x)\, y^n \qquad (*)$$

(i) Selesaikan (*) jika $n=0$.

(ii) Selesaikan (*) jika $n=1$.

(iii) Tunjukkan yang jika $n \neq 0, 1$ pertukaran pembolehubah $v = y^{1-n}$ menurunkan (*) ke suatu persamaan linear.

(iv) Selesaikan

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0.$$

(25 markah)

(b) Kadar pernambahan sejenis bakteria pada suatu ketika berkadaran dengan jumlah bakteria yang terdapat pada ketika itu. Jika jumlah bakteria menjadi dua kali ganda jumlah asal selepas 2 jam, selepas beberapa lama jumlah bakteria menjadi tiga kali ganda jumlah asal?

(25 markah)

(c) Selesaikan

$$x\, p^2 + 2px = y$$

di mana $p = \frac{dy}{dx}$.

Anda boleh andaikan $p + 1 \neq 0$.

(25 markah)

(d) Pertimbangkan persamaan

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x).$$

Tunjukkan jika f ialah sebarang penyelesaian persamaan ini, penjelmaan

$$y = f + \frac{1}{v}$$

akan menurunkan persamaan kepada suatu persamaan linear dalam v.

Selesaikan $\frac{dy}{dx} = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$ jika diberikan $f(x) = 1$ ialah satu penyelesaian persamaan ini.

(25 markah)

2. (a) Adakah masalah nilai awal

$$e^x y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = e^{-x}$$
$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$$

mempunyai penyelesaian unik atas $-\infty < x < \infty$? Berikan sebab-sebab.

(10 markah)

(b) Selesaikan persamaan

$$(**) \qquad x^2 y'' + 3x y' + y = 0 \qquad (\text{di mana } x > 0)$$

jika diberikan yang $y = \frac{1}{x}$ ialah suatu penyelesaian persamaan (**).

(50 markah)

(c) Selesaikan persamaan

$$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$$

dengan menggunakan kaedah pekali belum tentu untuk mendapat penyelesaian khusus.

(40 markah)

.../3

3. (a) Selesaikan

$$y'' - 2y' + y = e^{x} \sinh x$$

dengan menggunakan kaedah ubahan parameter untuk mendapatkan penyelesaian khusus.

(40 markah)

(b) Tunjukkan yang pertukaran pembolehubah $t = ax + b$ menjelmakan persamaan

$$b_0(ax + b)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b_1(ax + b) \frac{dy}{dx} + b_2y = 0$$

kepada suatu persamaan Cauchy-Euler. Selesaikan

$$(x - 3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3(x - 3) \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{(di mana } x > 3).$$

(40 markah)

(c) Selesaikan

$$4x^2 y'' + 4x y' - y = \frac{12}{x} \qquad \text{(di mana } x > 0).$$

(20 markah)

4. (a) Selesaikan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

(60 markah)

(b) Jelmakan

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = t^2$$

kepada suatu sistem persamaan pembezaan peringkat satu.

(40 markah)

.../4

5. Pertimbangkan persamaan

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (***)$$

di mana a_0, a_1 dan a_2 adalah selanjar atas selang nyata $a \leqslant x \leqslant b$, dan $a_0(x) \neq 0$ untuk semua x atas selang ini. Andaikan f_1 dan f_2 adalah dua penyelesaian berlainan (***) atas $a \leqslant x \leqslant b$ dan andaikan juga $f_2(x) \neq 0$ untuk semua x atas selang ini. $W[f_1(x), f_2(x)]$ menandakan Wronskian f_1 dan f_2 di x.

(a) (i) Takrifkan $W[f_1(x), f_2(x)]$.

(ii) Tunjukkan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{-W[f_1(x), f_2(x)]}{[f_2(x)]^2}$$

untuk semua x atas $a \leqslant x \leqslant b$.

(iii) Tunjukkan yang jika $W[f_1(x), f_2(x)] = 0$ untuk sesuatu x atas $a \leqslant x \leqslant b$, maka f_1 dan f_2 bersandar secara linear atas selang ini.

(35 markah)

(b) Andaikan g_1 dan g_2 adalah dua penyelesaian (***).

(i) Tunjukkan yang jika g_1 dan g_2 mempunyai sifar sepunya di titik x_0 dalam selang $a \leqslant x \leqslant b$, maka g_1 dan g_2 bersandar secara linear atas $a \leqslant x \leqslant b$.

(ii) Tunjukkan yang jika g_1 dan g_2 mempunyai maksimum tempatan sepunya di titik x_0 dalam selang $a \leqslant x \leqslant b$, maka g_1 dan g_2 bersandar secara linear atas $a \leqslant x \leqslant b$.

(iii) Tunjukkan yang jika g_1 dan g_2 tak bersandar secara linear atas $a \leqslant x \leqslant b$ dan A_1, A_2, B_1 dan B_2 adalah pemalar sedemikian $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, maka penyelesaian-penyelesaian $A_1g_1 + A_2g_2$ dan $B_1g_1 + B_2g_2$ bagi persamaan (***) juga tak bersandar secara linear atas $a \leqslant x \leqslant b$.

(65 markah)

- oooOOooo -