UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1997/98

September 1997

MAT 203/303 - Kalkulus Vektor

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawan **SEMUA** soalan.

1. (a) Dapatkan persamaan garis dalam bentuk parameter yang melalui $P_0 = (1, 1, 0, 1)$ dan $P_1 = (0, 1, 1, 1)$. Jika garis ini berserenjang dengan suatu satah pada titik $(1, 1, 1, 1)$, cari persamaan satah ini.

   (b) Katakan $F(X) = 4(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2 - x_4^2$; $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Cari ∇F pada titik $X_0 = (1, 0, 1, 0)$. Seterusnya dapatkan $\nabla z\, F(X_0)$, $z = (1, 1, 0, 0)$.

   (c) Katakan $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ditakrifkan oleh

   $$F(x_1, x_2) = x_2^2 .$$

   Dapatkan $T(x_1, x_2)$ suatu satah yang menyentuh F di $X_0 = (0, 1)$.

   (d) Cari nilai hampir $\sqrt{(6.01)^2 + (8.01)^2}$.

   (e) Katakan $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suatu pemetaan linear. Jika $L\left(\underset{\sim}{e}_1\right) = \underset{\sim}{e}_1 + z\underset{\sim}{e}_2$ dan $L\left(\underset{\sim}{e}_2\right) = -\underset{\sim}{e}_1$, tuliskan matriks $[L]$. Seterusnya dapatkan $L(x_1, x_2)$ dan $L(2, 1)$.

...2/-

(f) Tunjukkan sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dan kon $a^2x^2 + b^2y^2 - z^2 = 0$ adalah berortogon pada setiap titik persilangan.

(g) Nilaikan $\int_C xy\,dx - (x+y)\,dy$ jika C adalah sebahagian geraf $y = x^2$ dari $(1, 1)$ ke $(-2, 4)$.

(h) Katakan $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\,\ell n(xyz)$.
Cari $[\,F'(x, y, z)\,]$.

(i) Katakan B sebagai suatu segitiga dengan bucu-bucu $(0, 0)$, $(2, 0)$ dan $(0, 2)$, dengan orientasi sempadan positif. Nilaikan,

$$\int_{\partial B} (e^x + y - 2x)dx + (7x - 5\sin y)dy.$$

(j) Cari jarak terdekat asalan daripada permukaan $z = \dfrac{1}{xy}$.

(50/100)

2. (a) Andaikan $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^3$ menakrifkan suatu lengkung licin yang tidak melalui asalan. Jika $F(t_0) = X_0$ suatu titik terdekat dengan asalan, tunjukkan $F'(t_0)$ berortogon dengan $F(t_0)$. Seterusnya tunjukkan vektor jejari sebarang titik pada bulatan adalah berortogon dengan vektor tangen di titik tersebut.

(b) Katakan $F(x, y, z) = xy + xz + yz$. Jika $x(z) = z^3 - 7$, nilaikan terbitan seluruh $F(x, y, z)$ pada $z = 2$, dan $y = 3$.

(c) Katakan $F(x, y, t) = x^2y - t\sin y$. Jika $x(t) = \cos \pi t$ dan $y(t) = t^3 - 1$, takrifkan $h(t) = F(x(t), y(t), t)$. Nilaikan h' pada $t = 1$.

...3/-

(d) Katakan $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ suatu pemetaan afin, dan $T\left(\underset{\sim}{0}\right) = Y_0$, $T\left(\underset{\sim}{e_i}\right) = Y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Jika

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{\sim}{e_i} \text{ tunjukkan}$$

$$T(X) = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(Y_i - Y_0\right).$$

(25/100)

3. (a) Katakan $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dengan domain D, dan S adalah suatu permukaan berparameter yang diberikan oleh $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ dan $z = z(u, v)$, $u, v \in D$.

(i) Andaikan

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ dan } \frac{\partial \phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

dan E, F, dan G ditakrifkan oleh

$$E = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2; \quad F = \frac{\partial \phi}{\partial u} \bullet \frac{\partial \phi}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2$$

tunjukkan S diberikan oleh $\int_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$

(ii) Berikan rumus jika $\frac{\partial \phi}{\partial u} \bullet \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0$.

(iii) Seterusnya dapatkan luas permukaan sfera dengan jejari R.

...4/-

(b) Dapatkan titik-titik genting dan tentukan jenisnya.

(i) $F(x, y) = \dfrac{xye^x}{1 + y^2}$

(ii) $F(x, y, z) = 3x^2 + 2x + y + z^2 - 2z + 5.$

(c) Andaikan $C = C_1 + C_2$, C_1 ditakrifkan oleh $\alpha_1(t) = (2, 3 - t)$, $0 \le t \le 2$ dan C_2 oleh $\alpha_2(t) = (4 - t, 1)$, $2 \le t \le 3$. Nilaikan

$$\int_C x^2dx + xydy$$

(d) Katakan $F(x, y, z) = (2x + y - 2z,\ 2x - 4y + z^2,\ x - 2y - z^2)$, gunakan teorem Stoke untuk menilai $\int_C F(X) \bullet dX$ di mana $X = (x, y, z)$ dan C adalah suatu bulatan berjejari 5 dengan pusat (0, 0, 3) dan terletak pada satah $z = 3$.

(25/100)

- oooOooo -