UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Hubungan H ditakrifkan atas R seperti yang berikut.

Untuk $x, y \in \mathbb{R}$,
$x H y \Leftrightarrow x y \geq 0.$

Tentukan sama ada H adalah refleksif, simetri dan transitif.
Juga cari $[-4]H$.

(35/100)

(b) Fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada R.

(i) Jika $G \subseteq \mathbb{R}$ adalah suatu set terbuka, buktikan bahawa $g^{-1}(G)$ juga terbuka.

(ii) Tentukan sama ada setiap set yang berikut adalah terbuka dan berikan alasan:

$$g^{-1}((-2, 5)), \quad g^{-1}([0, \infty)),$$

dan $g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)$ di mana setiap $G_n \subset \mathbb{R}$ adalah terbuka.

(40/100)

...2/-

(c) Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $A \subset \mathbb{R}$. Tunjukkan bahawa $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(25/100)

2. (a) Diberi $A_n = \{ x \mid x = kn, \ k \in \mathrm{N} \}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, cari

(i) $A_2 \cap A_5$

(ii) $A_p \cup A_{pq}$, di mana $p, q \in \mathrm{N}$

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(20/100)

(b) Katakan $a_1 = 7$ dan $a_{n+1} = 7 - \dfrac{6}{a_n}$, $n \geq 1$.

(i) Tunjukkan bahawa $a_n \geq 6, \ \forall n \in \mathrm{N}$.

(ii) Tunjukkan bahawa jujukan $\{ a_n \}$ menyusut.

(iii) Wujudkah $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$? Berikan alasan.
Jika had ini wujud, carinya.

(iv) Siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpukah? Berikan alasan.

(40/100)

(c) (i) X dan Y adalah dua set yang tak terhingga tetapi terbilangkan. Tunjukkan bahawa set hasil darab $X \times Y$ juga terbilangkan.

(ii) S merupakan suatu himpunan selang-selang yang tertutup pada $\mathbb{R}$ dengan nombor nisbah sebagai titik hujungnya, iaitu

$$S = \{ [a, b] \mid a \leq b, \ a, \ b \in Q \}$$

Tunjukkan bahawa S terbilangkan.

(40/100)

...3/-

3. (a) Buktikan bahawa tidak terdapat sebarang nombor nisbah x supaya $x^2 = 7$.

(30/100)

(b) Katakan $A = \left\{ \frac{2}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathrm{N} \right\} \cup [\,202, \infty\,)$.

(i) Cari $\inf A$ dan $\sup A$ jika wujud.

(ii) Cari semua titik had bagi A.

(iii) Cari semua titik pedalaman bagi A.

(iv) Adakah A tertutup? Berikan alasan.

(v) Adakah A padat? Berikan alasan.

(40/100)

(c) Katakan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$ dan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terbezakan pada $\mathbb{R}$. Jika $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \le 1$, $|g(x)| \le 1$ dan $|g'(x)| \le 1$, tunjukkan bahawa fg selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(30/100)

4. Nyatakan sama ada pernyataan berikut benar atau salah. Jika pernyataan itu benar, buktikannya dan jika ia salah, berikan satu contoh lawan untuk menunjukkan ia salah.

(a) Infimum suatu set S, jika wujud, adalah unik.

(b) Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $G \subset \mathbb{R}$ adalah terbuka, maka $f(G)$ terbuka juga.

(c) Katakan $S \subset \mathbb{R}$ dan $a \in \mathbb{R}$. Jika a adalah suatu batas atas bagi S dan a juga suatu titik had bagi S, maka $a = \sup S$.

(d) Jika jujukan fungsi $\{f_n\}$ dan $\{g_n\}$ masing-masing menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$, maka jujukan fungsi $\{f_n\, g_n\}$ juga menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(100/100)

- oooOooo -