UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Diberi set $A \sim \mathbb{R}$ dan set $B \sim \mathbb{N}$.

(i) Nyatakan tanpa bukti sama ada A dan B masing-masing adalah terbilangkan.

(ii) Adakah $A \cap B$ terbilangkan? Berikan alasan.

(iii) Adakah $A \cup B$ terbilangkan? Berikan alasan.

(b) (i) Buktikan teorem penumpuan berekanada, iaitu, jika jujukan nombor nyata $\{a_n\}$ adalah menokok dan terbatas dari atas, buktikan bahawa $\{a_n\}$ menumpu ke u di mana $u = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Nyatakan tanpa bukti satu bentuk lagi teorem penumpuan berekanada tentang jujukan yang serupa dengan pernyataan di dalam bahagian (i).

(iii) Diberi jujukan nombor $\{b_n\}$ dengan

$$b_1 = 1,$$

$$b_{n+1} = \frac{2+b_n}{3+b_n}, \quad n \geq 1.$$

Dengan menggunakan aruhan matematik, tunjukkan bahawa

$$b_{n+1} < b_n, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Berikan satu batas bawah bagi jujukan $\{b_n\}$.
Adakah jujukan $\{b_n\}$ menumpu? Berikan alasan dan jika ya, cari had ini.

(100 markah)

...2/-

2. (a) Andaikan fungsi $f(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ dan selang $A_n = \left[\frac{1}{n}, n\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Dapatkan set imej $f(A_n)$.

   (ii) Cari $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)$.

   (b) Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $[a, b]$. Jika $f(a) > a$ dan $f(b) < b$, dengan menggunakan fungsi $g(x) = f(x) - x$ tunjukkan bahawa wujud $c \in (a, b)$ supaya $f(c) = c$.

   (c) Andaikan set $A = (-1, 1] \cup \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (i) Cari set titik pedalaman A°.
   (ii) Cari set titik had A'.
   (iii) Adakah A tertutup? Berikan alasan.
   (iv) Adakah A padat? Berikan alasan.

   (d) Andaikan a satu nombor nyata dan F satu subset yang bukan kosong dari $\mathbb{R}$. Jika F set tertutup dan $a \notin F$, tunjukkan bahawa wujud $\varepsilon > 0$ supaya

$$|a - x| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in F.$$

(100 markah)

3. (a) Andaikan A dan B subset yang terbatas dari $\mathbb{R}$ dan $A \subset B$.

   (i) Buktikan bahawa $\inf A \geq \inf B$.
   (ii) Nyatakan tanpa bukti hubungan di antara $\sup A$ dengan $\sup B$.
   (iii) Jika c ialah batas atas set A dan $c \in A$, buktikan bahawa $c = \sup A$.

   (b) Andaikan fungsi $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$ dan petak $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right\}$.

   (i) Cari hasil tambah atas $A(P_n ; f)$.
   (ii) Cari hasil tambah bawah $B(P_n ; f)$.
   (iii) Dengan itu, tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

[Gunakan $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^2$].

(c) Andaikan S sebagai suatu selang.

(i) Jika $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in S$, buktikan bahawa fungsi f menokok pada S.

(ii) Jika $g'(x) \geq h'(x)$, $\forall\, x \in S$, adakah $g(x) \geq h(x)$, $\forall\, x \in S$? Berikan alasan.

(100 markah)

4. (a) Buktikan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{(n+2)^4}$ menumpu secara seragam pada $[0, \infty)$.

(b) Jujukan fungsi $\{f_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}, \quad x \in [1, 2], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Cari fungsi had jujukan $\{f_n\}$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\{f_n\}$ tidak menumpu secara seragam pada $[1, 2]$.

(c) Jika fungsi f dan g adalah selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$, buktikan bahawa fungsi $f+g$ juga selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(d) Jika fungsi $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ selanjar pada $[0, 1]$ dan

$$\int_0^x h(t)\,dt = \int_x^1 h(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [0, 1],$$

buktikan bahawa

$$h(x) = 0, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

(100 markah)

-ooo0ooo -