

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Tentukan sama ada set berikut adalah terbuka. Berikan alasan.
 - (i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 202\}$
di mana fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjut pada $\mathbb{R}$.
 - (ii) $B = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{I}^+ \right\} \cup (3, 10]$
- (b) Nyatakan sama ada setiap pernyataan berikut benar atau salah. Jika pernyataan itu benar, buktikannya dan jika ia salah, berikan satu contoh untuk menunjukkan ia salah.
 - (i) Andaikan $T \subset S$. Jika set T terbilangkan tetapi set S tak terbilangkan, maka set $S - T$ adalah tak terbilangkan.
 - (ii) Jika fungsi $h: D \rightarrow \mathbb{I}^+$ adalah keseluruhan, maka set D adalah terbilangkan.
- (c) Diberi fungsi $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan g' selanjut pada $[a, b]$. Dengan menggunakan takrif sifat selanjut secara seragam, tunjukkan g adalah selanjut secara seragam pada $[a, b]$.

(100 markah)

2. (a) Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan

$$A_n = \left(a - \frac{1}{4^n}, b + \frac{1}{4^n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

cari $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

...2/-

- (b) Andaikan set S dari $\mathbb{R}$ adalah terbatas. Jika $a > 0$ dan $aS = \{ax \mid x \in S\}$, buktikan

$$\sup(aS) = a \sup S.$$

Dengan ini, dapatkan nilai $\sup(aS)$ apabila $a = 5$ dan $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$.

- (c) (i) Andaikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjut pada $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahawa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $f(a) > 0$, maka wujud suatu $\delta > 0$ supaya

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in J(a; \delta).$$

- (ii) Diberi fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjut pada $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dan $g(a) < 1$. Dengan menggunakan keputusan dalam bahagian (i), tunjukkan bahawa wujud suatu $\delta > 0$ supaya

$$g(x) < 1, \quad \forall x \in J(a; \delta)$$

(100 markah)

3. (a) Jujukan $\{x_n\}$ ditakrifkan secara rekursi seperti yang berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{3^n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

- (i) Tentukan sama ada jujukan $\{x_n\}$ menokok atau menyusut.
(ii) Tunjukkan bahawa $\{x_n\}$ adalah jujukan Cauchy.
(iii) Adakah $\{x_n\}$ terbatas? Berikan alasan.
Cari $\inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan $\sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, jika wujud.

- (b) (i) Nyatakan teorem nilai min.
(ii) Andaikan S sebagai suatu selang dan fungsi $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ adalah terbezakan dengan $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in S$. Buktikan bahawa f menokok pada S .
(iv) Fungsi g dan h terbezakan pada $[a, b]$ dengan $g'(x) \geq h'(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Jika $g(b) = h(b)$, nyatakan hubungan di antara fungsi g dan h pada $[a, b]$ dan buktikannya.

(100 markah)

...3/-

4. (a) Buktikan bahawa siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{(n+2)^4}$ menumpu secara seragam pada R .
- (b) (i) Nyatakan teorem ketumpatan nombor nisbah.
- (ii) Diberi $q \in R - Q$. Buktikan bahawa wujud jujukan $\{r_n\} \subset Q$ yang menokok dan menumpu ke q .
- (c) (i) Andaikan fungsi $g : [a, b] \rightarrow R$ menokok pada $[a, b]$ dan $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ialah petak pada $[a, b]$ dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ bagi $i = 1, 2, \dots, n$.
- Cari $A(P_n; g) - B(P_n; g)$.
- Dengan menggunakan hasil ini, buktikan bahawa g terkamirkan pada $[a, b]$.
- (ii) Dengan menggunakan bahagian (i), tentukan sama ada fungsi

$$h(x) = \frac{e^{x+1}}{5-x}, \quad x \in [0, 4],$$

terkamirkan pada selang $[0, 4]$? Berikan alasan.

(100 markah)

- ooo0ooo -