

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1987/88
MAT201 - Kalkulus Lanjutan

Tarikh: 5 November 1987

Masa: 9.00 pagi. - 12.00 t/hari.
(3 jam)

Jawab EMPAT (4) soalan.

1. (a) (i) Lakarkan lengkung

$$r = 1 + \sin \theta$$

- (ii) Cari luas kawasan yang terletak di dalam lengkung $r = 1 + \sin \theta$ tetapi di luar bulatan $r = 1$.

(25/100)

- (b) Diberi $W = \frac{x^2 y}{z}$, cari pembeza seluruh dW .

Jika ukuran bagi x , y dan z adalah tepat setakat ± 0.2 unit, dengan menggunakan pembeza seluruh, anggarkan ralat terbesar bagi W apabila $x = 5$, $y = 4$ dan $z = 10$.

(20/100)

- (c) Tentukan sama ada $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud atau tidak jika

(i) $f(x, y) = \frac{x^5 - 2y^2}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

(ii) $f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 + 4x^2)(1 + 6y^2)} - 1}{2x^2 + 3y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

(25/100)

.../2

(d) Tunjukkan $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) 2^{2n+3}}$. Dengan ini

deduksikan nilai $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) 2^{2n+3}}$

(30/100)

2. (a) Jika fungsi $x(r, s)$ dan $y(r, s)$ ditakrifkan secara tersirat sebagai

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2s = 0$$

$$x^3 - y^3 - r^3 + 3s = 1 ,$$

cari $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_s$ dan $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_r$.

(22/100)

- (b) Untuk siri kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + n} (x - 2)^n$, cari jejari penumpuan dan selang penumpuannya.

(23/100)

- (c) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 3x} dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3} dt$

(iii) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x}} dx , \quad \alpha > 0$

(30/100)

(d) $a_n = \log n - \log (n + 3)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(i) Tunjukkan jujukan $\{a_n\}$ menokok ekanada.

(ii) Adakah jujukan $\{a_n\}$ menumpu? Mengapa?

(25/100)

3. (a) Diberi $f(x, y) = e^{x^2 - xy}$, $x = s^2 \log t$, $y = \sin(7t + 2s)$, cari $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s$ dan $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_t$.

(20/100)

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y - 2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Kelaskan jenis titik genting bagi fungsi f ini.

(ii) Cari ekstremum bagi fungsi f pada rantau membulat $A = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 \leq 1\}$.

(30/100)

(c) (i) Tuliskan rumus Leibnitz teritlak bagi kamiran untuk

$$\frac{d}{dt} \int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t) dx .$$

(ii) Jika $u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t g(x) \sin \omega(t - x) dx$, di mana ω adalah

suatu pemalar yang bukan sifar, tunjukkan bahawa

$$u(0) = \frac{du}{dt} (0) = 0$$

dan $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = g(t)$.

(30/100)

(d) Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$.

Jika $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$, adakah

siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu atau mencapah? Beri alasan.

(20/100)

4. (a) Jika $f(x, y) = (1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}$,

(i) cari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii) cari $\frac{\partial}{\partial x} \left[(y^2 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right]$

(30/100)

(b) Tentukan sama ada siri nombor berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}$

(25/100)

(c) (i) Tuliskan siri Taylor bagi suatu fungsi $f(x)$ di sekeliling titik a .

(ii) Cari siri Taylor ini jika

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}} \text{ dan } a = 0.$$

(25/100)

(d) Jika $H = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ adalah suatu fungsi yang terbezakan, tunjukkan bahawa

$$x H_x + y H_y + z H_z = 0.$$

(20/100)

5. (a) Lakarkan domain kamiran dan nilaikan kamiran yang berikut:

(i)
$$\iint_D y x^3 dx dy$$

di mana D adalah rantau yang dibatasi di antara lengkung $y = x^2$ dan $y = x$.

(ii)
$$\int_0^1 \int_y^1 \sinh(x^2) dx dy$$

(iii)
$$\iint_A (x + y) dx dy$$

di mana $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

(iv)
$$\iint_T f(x, y) dx dy$$

di mana $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } y \geq 0 \\ 2 & \text{jika } y < 0 \end{cases}$

dan T adalah suatu segitiga yang berbucu $(-1, -1)$, $(2, 2)$ dan $(-1, 2)$.

(65/100)

(b) (i) Dengan menggunakan kamiran berganda, cari isipadu kon K yang diberikan sebagai

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 4\}.$$

(ii) Jika suatu lubang yang berbentuk silinder membulat yang berjajari 1 unit dan mempunyai paksi z sebagai paksinya digerudi ke dalam kon K. Apakah isipadu bongkah yang tertinggal daripada kon ini?

(35/100)