

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1995/96

Mac/April 1996

MAT 201 - Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

Jawab **EMPAT (4)** soalan.

1. (a) Katakan $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$. Tunjukkan bahawa

$$f_x + f_y + f_z = (x + y + z)^2$$

$$2x + z^2 + x^2 + 2y + y^2 + 2z$$

(10/100)

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z$$

- (b) Adakah pembezaan seluruh

$$d\left(\frac{x}{x-y}\right) \text{ dan } d\left(\frac{y}{x-y}\right)$$

sama? Terangkan.

(15/100)

- (c) Tunjukkan bahawa $f_x(0, 0) = 0$ tetapi $f_y(0, 0)$ tidak wujud, di mana

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{jika } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{jika } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(20/100)

.../2

(d) Katakan

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}}, & \text{jika } y \neq 0 \\ 0, & \text{jika } y = 0 \end{cases}$$

Cari

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=y)}} g(x, y) \quad \text{dan} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=y^2)}} g(x, y).$$

Adakah $g(x, y)$ selanjur pada $(0, 0)$?

(25/100)

(e) Katakan F dan G adalah fungsi tiga pembolehubah dan persamaan-persamaan $F(x, y, z) = 0$ dan $G(x, y, z) = 0$ boleh diselesaikan supaya y dan z boleh ditulis dalam sebutan x : $y = y(x)$ dan $z = z(x)$. Gunakan petua rantai untuk menuliskan

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dx}$$

dalam sebutan terbitan-terbitan separa bagi F dan G . Anggapkan bahawa terbitan-terbitan separa selanjur dan

$$F_y G_z \neq F_z G_y.$$

(30/100)

2. (a) Cari titik-titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}.$$

(10/100)

.../3

- (b) Tunjukkan bahawa kedua-dua fungsi

$$z = u + f(u^2 v^2) \quad \text{dan} \quad z = u + g(uv)$$

memenuhi persamaan

$$u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

(15/100)

- (c) Cari nilai ekstremum mutlak bagi fungsi f pada set S :

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y,$$

$$S: 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

(25/100)

- (d) Jika RM x ribu dibelanjakan untuk tenaga buruh, dan RM y ribu dibelanjakan untuk kelengkapan, maka dianggarkan bahawa output suatu kilang ialah

$$Q(x, y) = 50 x^{2/5} y^{3/5}$$

unit. Jika RM150,000.00 diperuntukkan, bagaimana modal ini diagihkan di antara tenaga buruh dan kelengkapan supaya menghasilkan output terbesar yang mungkin?

(25/100)

- (e) Tunjukkan bahawa jika $z = f(r, \theta)$, di mana r dan θ ditakrifkan secara tersirat sebagai fungsi dari x dan y oleh persamaan-persamaan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, maka persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

boleh dijadikan persamaan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

(25/100)

.../4

3. (a) Nilaiikan

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^{\sin y} e^{-x} \cos y \, dx \, dy .$$

(10/100)

(b) Tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \, dy = -\frac{1}{2} .$$

Adakah

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dy \, dx = -\frac{1}{2} ?$$

Terangkan.

(20/100)

(c) Nilaiikan

$$\iint_C (x^2 + y^2)^{1/2} \, dx \, dy ; \quad C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq -2x \} .$$

(20/100)

(d) Gunakan kamiran berganda dua dalam koordinat kutub untuk mencari isipadu bungkah yang dibatasi oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$.

(25/100)

(e) Tuliskan semula kamiran berganda tiga

$$\int_0^1 \int_1^x \int_0^{\sqrt{xy}} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

sebagai suatu kamiran berganda tiga dalam order $dy \, dx \, dz$.

(25/100)

.../5

4. (a) Cari nilai had jujukan atau tunjukkan jujukan yang diberi mencapah:

$$(i) \left\{ \frac{e^n}{n!} \right\}, \quad (ii) \left\{ \frac{3n^2 - n + 1}{(1 - 2n)n} \right\}, \quad (iii) \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

(15/100)

- (b) Cari nilai A dan B supaya

$$\frac{n-1}{2^{n+1}} = \frac{An}{2^n} - \frac{Bn+1}{2^{n+1}},$$

dan seterusnya nilaikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n+1}}.$$

(15/100)

- (c) Ujikan ketumpuan siri:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{(1 - 2n)^n}, \quad (iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

(30/100)

- (d) Cari selang penumpuan bagi siri

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

(20/100)

- (e) Cari siri Taylor bagi

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

dalam kuasa $(x - \frac{1}{2})$.

$$\left[\text{Petunjuk: } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \right].$$

(20/100)

...16

5. (a) Tentukan sama ada setiap kamiran tak wajar menumpu, dan cari nilainya jika ia menumpu:

$$(i) \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx, \quad (ii) \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx \quad (iii) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4 + x^2} dx.$$

(25/100)

- (b) Katakan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{jika } x \geq 1 \\ 1, & \text{jika } -1 < x < 1 \\ e^{x+1}, & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$$

Nilaikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

(15/100)

- (c) (i) Tunjukkan bahawa siri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{3^n}$$

menumpu secara seragam pada $[0, \pi]$.

- (ii) Nilaikan kamiran

$$\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{3^n} \right] dx$$

(30/100)

.../7

- (d) Gunakan pembezaan dan pengkamiran bahagian demi bahagian untuk menunjukkan

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(rx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}r^2}$$

$$\left[\text{Petunjuk: } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right].$$

(30/100)

- oooOOooo -