

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MAT 122 – Persamaan Pembezaan I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Persamaan pembezaan $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ mempunyai suatu faktor pengamir dalam bentuk $\frac{1}{x^k}$.

Tentukan nilai k dan seterusnya selesaikan persamaan pembezaan tersebut.

- (b) Tunjukkan bahawa pada selang $[0, \pi]$, kedua-dua fungsi $y_1(x) \equiv 1$ dan $y_2(x) = \cos x$ memenuhi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0, \quad y(0) = 1.$$

Adakah hal ini bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan. Jelaskan jawapan anda.

- (c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$x \frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

(100 markah)

2. (a) Diberikan masalah nilai awal

$$y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

- (i) Tunjukkan dengan mengguna rumus Euler bahawa

$$y_k = (1+2h)y_{k-1} + h\left(\frac{1}{2} - x_{k-1}\right)$$

- (ii) Tunjukkan bahawa $y_1 = (1+2h) + x_1/2$ dan seterusnya

$$y_n = (1+2h)^n + x_n/2$$

- (iii) Dapatkan satu rumus bagi ralat rumus setempat e_{n+1} dalam sebutan x dan penyelesaian tepat ϕ jika kaedah Euler digunakan bagi masalah nilai awal (1) di atas.

- (b) Selesaikan persamaan pembezaan

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

sekitar titik biasa $x = 0$. Nyatakan selang di mana penyelesaian ini sah.

(100 markah)

3. (a) Selesaikan $(D^2 - 4D + 4)y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$ jika diberikan $D = \frac{d}{dx}$.

- (b) Pertimbangkan persamaan pembezaan peringkat kedua tak homogen

$$(D^2 + 1)y = f(x) \quad (2)$$

di mana $D = \frac{d}{dx}$.

Tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi per(2) diberikan oleh

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x f(\beta) \sin(x - \beta) d\beta.$$

(Petunjuk: $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$)

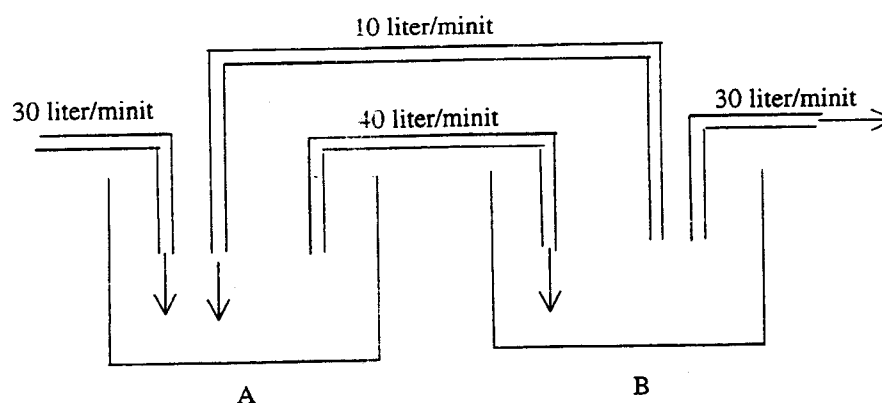
(100 markah)

4. (a) Dapatkan penyelesaian am bagi sistem tak homogen

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

pada selang $(-\infty, \infty)$.

- (b) Pertimbangkan dua tangki A dan B. Katakan tangki A



Rajah 1

...3/-

mengandungi 500 liter air garam dengan 500gm garam telah dilarutkan, sedangkan tangki *B* mengandungi 500 liter air. Air mengalir ke dalam tangki *A* dengan kadar 30 liter seminit, dan campuran itu mengalir dari *A* ke *B* dengan kadar 40 liter seminit. Dari *B*, 10 liter seminit dipamkan kembali ke tangki *A*, sedangkan 30 liter seminit dikeluarkan daripada sistem (lihat Rajah 1). Katakan x dan y mewakili amaun garam di dalam tangki *A* dan tangki *B* masing-masing, maka kadar perubahan amaun garam di dalam setiap tangki dapat dirumuskan dengan sistem.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{40}{500}x + \frac{10}{500}y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{40}{500}x - \left(\frac{10}{500} + \frac{30}{500}\right)y.$$

- (i) Tunjukkan bahawa

$$625 \frac{d^2y}{dt^2} + 100 \frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Seterusnya, dapatkan y .

- (ii) Cari amaun garam yang maksimum di dalam tangki *B*. Bilakah kepekatan maksimum ini berlaku?

(100 markah)

- 0000000 -