UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAT122/MAT221 - Persamaan Pembezaan I

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) Tentusahkan bahawa kedua-dua fungsi $y_1(x) = 1 - x$ dan $y_2(x) = -x^2/4$ adalah penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = \frac{-x + \left(x^2 + 4y\right)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = 1 .$$

(ii) Di manakah setiap penyelesaian ini sah?

(iii) Adakah kewujudan dua penyelesaian bagi masalah di atas bercanggah dengan Teorem kewujudan dan keunikan? Jelaskan jawapan anda

(40/100)

(b) Selesaikan persamaan

$$(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0$$

(30/100)

...2/-

(c) (i) Tunjukkan bahawa $\dfrac{1}{Mx - Ny}$ di mana $Mx - Ny$ tidak sama dengan sifar secara secaman merupakan satu faktor pengamir bagi persamaan

$$Mdx + Ndy = yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$$

$$\left[\text{Petunjuk: } y\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = x\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right].$$

(ii) Seterusnya, selesaikan

$$y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$$

(30/100)

2. (a) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = 1 - x + y, \quad y(x_0) = y_0 \qquad \text{(A)}.$$

(i) Tunjukkan dengan mengguna rumus Euler bahawa

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - hx_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(ii) Perhatikan bahawa $y_1 = (1 + h)(y_0 - x_0) + x_1$. Tunjukkan bahawa

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - x_0) + x_n.$$

(iii) Dapatkan satu rumus bagi ralat rumus setempat e_{n+1} dalam sebutan x dan penyelesaian tepat ϕ jika kaedah Euler digunakan bagi masalah nilai awal (A) di atas.

(60/100)

(b) Selesaikan $y'' + 2x^2y = 0$ dalam kuasa x. Tentukan jejari penumpuan penyelesaian siri kuasa ini.

(40/100)

...3/-

3. (a) Pertimbangkan persamaan pembezaan Bessel dengan indeks sifar

$$xy'' + y' + xy = 0 .$$

Katakan satu penyelesaian bagi persamaan ini diberikan oleh $J_0(x)$. Tunjukkan bahawa satu penyelesaian kedua mengambil bentuk

$$J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2} .$$

(30/100)

(b) Selesaikan $y'' + y' - 12y = \sinh 4x$ jika diberikan identiti $\sinh 4x = \dfrac{(e^{4x} - e^{-4x})}{2}$.

(30/100)

(c) Katakan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian bagi persamaan homogen bersepadanan dengan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad \text{(B)}$$

Katakan $W(x)$ ialah Wronskian bagi y_1 dan y_2 dan $W(x) \neq 0$ pada selang $a < x < b$. Tunjukkan bahawa satu penyelesaian khusus bagi (B) diberikan oleh

$$y_p = \int_a^x \frac{f(\beta)[y_1(\beta)y_2(x) - y_1(x)y_2(\beta)]d\beta}{W(\beta)}$$

(40/100)

4. (a) Dapatkan penyelesaian am bagi sistem berikut:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} e^{6t}$$

(50/100)

(b) Suatu model yang meramalkan kelakuan pengguna terhadap barangan A diberikan oleh

$$X' = a(Y - 2X)$$
$$Y' = b(X - 2Y) + I_0 ,$$

di mana

$X(t)$ mewakili paras pembelian bagi A,
$Y(t)$ sikap pengguna terhadap A,
I_0 adalah kesan iklan yang dianggap tetap sepanjang masa dan a, b ialah nombor positif

(i) Tunjukkan bahawa

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{I_0}{3b}$$

dengan

$$\lambda_1 = -(a+b) - \left(a^2 + b^2 - ab\right)^{1/2}$$
$$\lambda_2 = -(a+b) + \left(a^2 + b^2 - ab\right)^{1/2}$$

dan c_1, c_2 adalah pemalar sebarangan.

(iii) Deduksikan bahawa

$$x \to \frac{I_0}{3b} \quad \text{apabila} \quad t \to \infty$$

(iaitu, paras pembelian mendekati suatu paras keseimbangan).

(50/100)

- oooOooo -