

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1987/88
MAT114 - Aljabar Linear

Tarikh: 2 November 1987

Masa: 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Diberi $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dapatkan

(i) $A + 3B - 2C$

(ii) $BAC + 3B^2C - 2BC^2$

(20/100)

(b) Selesaikan sistem persamaan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(20/100)

(c) Jika $E_3^2(-1) E_2(\frac{1}{2}) E_3^1(-1) E_2^1(-1) B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

dapatkan

(i) B

(ii) $[B^T B]^{-1}$

(20/100)

.../2

(d) Diberi sebarang tiga matriks A, B, C peringkat nxn,

(i) buktikan $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) buktikan bahawa $A(B + C) = AB + AC$.

(40/100)

2. (a) Selesaikan sistem $x + y - z = 1$
 $2x + 3y + az = 3$
 $x + ay + 3z = 2$

yang mempunyai penyelesaian unik.

(15/100)

(b) Tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c).$$

(15/100)

(c) Tentukan nilai-nilai α sehinggakan sistem

$$\begin{aligned} x + \alpha y - z &= 1 \\ 2x + 3y + \alpha z &= 3 \\ x + \alpha y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

(i) mempunyai penyelesaian unik.

(ii) mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.

(iii) tak konsisten.

(30/100)

(d) (i) A dan B adalah matriks nxn. Buktikan $|AB| = |A||B|$.

(ii) A adalah matriks 2x2 dan $A^2 = \tilde{0}$. Cari $|cI - A|$.

(40/100)

.../3

3. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Dapatkan

- (i) $|A|$
- (ii) $A \text{ adj}(A)$
- (iii) $|\text{adj } A|$
- (iv) A^{-1}
- (v) $|\text{adj}(4A)^{-1}|$
- (vi) $|\text{adj}(\text{adj } A^T)|$
- (vii) $A^2 \text{ adj}(5A^2)$
- (viii) pangkat bagi $\text{adj}(-A)$
- (ix) $|E_2^1 E_3^1(4) E_1(5) (\text{adj } A)|$
- (x) X di mana $A \text{ adj}(13A)X = 169 AX + \begin{pmatrix} 169 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(40/100)

(b) Katakan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $T = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

Dapatkan suatu asas masing-masing bagi S , T , $S \cap T$ dan $S + T$.

(20/100)

(c) U dan W adalah subruang bagi \mathbb{R}^3 dan $\dim(U) = \dim(W) = 2$.
Tunjukkan $U \cap W \neq \{0\}$.

(15/100)

(d) U , V dan W adalah subruang bagi suatu ruang vektor. Buktikan
 $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$,
Cari subruang U , V , W dari \mathbb{R}^3 sedemikian
 $(U \cap V) + (U \cap W) \neq U \cap (V + W)$.

(25/100)

3. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Dapatkan

(i) $|A|$

(ii) $A \operatorname{adj}(A)$

(iii) $|\operatorname{adj} A|$

(iv) A^{-1}

(v) $|\operatorname{adj}(4A)^{-1}|$

(vi) $|\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A^T)|$

(vii) $A^2 \operatorname{adj}(5A^2)$

(viii) pangkat bagi $\operatorname{adj}(-A)$

(ix) $|E_2^1 E_3^1(4) E_1(5) (\operatorname{adj} A)|$

(x) X di mana $A \operatorname{adj}(13A)X = 169 AX + \begin{pmatrix} 169 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(40/100)

(b) Katakan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $T = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

Dapatkan suatu asas masing-masing bagi S , T , $S \cap T$ dan $S + T$.

(20/100)

(c) U dan W adalah subruang bagi \mathbb{R}^3 dan $\dim(U) = \dim(W) = 2$.
Tunjukkan $U \cap W \neq \{0\}$.

(15/100)

(d) U , V dan W adalah subruang bagi suatu ruang vektor. Buktikan
 $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V + W)$.

Cari subruang U , V , W dari \mathbb{R}^3 sedemikian
 $(U \cap V) + (U \cap W) \neq U \cap (V + W)$.

(25/100)

4. (a) (i) Dapatkan nilai-eigen dan vektor-eigen bagi

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Dapatkan juga nilai-eigen masing-masing bagi A^3 , A^T , AA^T dan $3A^3 - A^T + 2A^T A$.

(50/100)

- (b) (i) A adalah suatu matriks $n \times n$. Buktikan A serupa dengan suatu matriks pepenjuru jika dan hanya jika A mempunyai n vektor yang tak bersandar linear.

(30/100)

- (c) A adalah simetri. λ_1 dan λ_2 adalah nilai-eigen ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) dan v_1 dan v_2 adalah vektor-eigen yang sepadan. Tentukan $v_1^T v_2$.

(10/100)

- (d) A dan B adalah matriks $n \times n$. α adalah suatu nilai-eigen bagi AB dan $\alpha \neq 0$. Buktikan α adalah juga suatu nilai-eigen bagi BA.

(10/100)