

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAT 102/MAT 201 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam ENAM halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana EMPAT soalan.

1. (a) Tunjukkan bahawa fungsi

$$f(x, y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

selanjur pada (0,0).

(20/100)

- (b) Cari semua titik genting bagi fungsi

$$g(x, y) = (x-1)(y-1)(x+y-1).$$

(20/100)

- (c) Katakan  $z = -xy + y^3$ ,  $x = 3t^2$ ,  $y = 1+t^3$ .

- (i) Tunjukkan bahawa

$$2x \frac{dy}{dx} - 3(y-1) = 0$$

- (ii) Tuliskan  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$  dan  $\frac{dz}{dx}$  dalam sebutan  $x$  dan  $y$ .

(20/100)

...2/-

- (d) Katakan  $u = h(x, y)$  dan  $v = k(x, y)$ . Tunjukkan

$$\frac{\partial(x, v)}{\partial(u, y)} = \frac{k_y}{h_x}$$

(20/100)

- (e) Katakan  $x = r(\cos\theta + \sin\theta)$ ,  $y = r(\cos\theta - \sin\theta)$ . Cari

(i)  $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta$

(iii)  $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_r$

(ii)  $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$

(iv)  $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_\theta$

(20/100)

2. (a) Transformasikan persamaan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = 0$$

dengan menggunakan penggantian pembolehubah

$$r = y - x, \quad s = x + y.$$

(20/100)

- (b) Cari nilai  $x^2yz$  yang terbesar di mana  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  dan  $x + y + z = 12$ .

(20/100)

- (c) Cari nilai had-had yang berikut:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

(20/100)

(d) Diberi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = 0$$

bagi semua  $b > 1$ . Deduksikan bahawa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

bagi  $-1 < a < 1$ .

(20/100)

(e) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri kuasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n^2 + 3}$$

(20/100)

3. (a) Cari nilai kamiran

$$\int_0^a \int_y^a \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad a > 0.$$

(20/100)

(b) Dengan menggunakan koordinat kutub silinder, cari nilai kamiran berikut

$$\iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz$$

di mana  $V$  adalah silinder pejal

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}(x + y), \quad 0 \leq z \leq 2.$$

(20/100)

(c) Tukarkan tertib pengkamiran

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) dx dy.$$

(20/100)

...4/-

(d) Cari nilai kamiran

$$\iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz ,$$

$$S = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

(20/100)

(e) Cari jisim bagi daerah yang dibatasi oleh lengkungan-lengkungan  $x = y^2$  dan  $x = 2y - y^2$ , dengan ketumpatan  $f(x, y) = y + 1$ .

(20/100)

4. (a) Tunjukkan jujukan

$$\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}_{n=1,2,3,\dots}$$

menumpu dengan melengkapkan langkah-langkah berikut:

- (i) Tunjukkan jujukan ini menyusut secara berekanda
- (ii) Tunjukkan jujukan ini terbatas dari bawah.

(30/100)

(b) Tunjukkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

dengan melengkapkan langkah-langkah berikut:

(i) Katakan

$$S_m = \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{dan} \quad H_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}.$$

Tunjukkan

$$S_{2m} = H_{2m} - H_m.$$

(ii) Dari bahagian (a), kita dapati

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (H_m - \ln m) = \gamma \quad (\text{katakan})$$

Gunakan fakta ini bersama dengan (i), tunjukkan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \ln 2$$

(20/100)

(c) Tunjukkan siri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

menumpu secara bersyarat.

(10/100)

(d) Cari nilai siri

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \right]$

(40/100)

5. (a) Ujikan ketumpatan siri yang berikut:

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4}}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

(20/100)

...6/-

(b) Jika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

bagi semua nombor nyata  $x$ , tunjukkan bahawa

$$f'(x) = -f(x)$$

(20/100)

(c) Ujikan ketumpuan kamiran tak wajar yang berikut:

(i)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{3x^4 + 5x^2 + 1} dx$

(ii)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} dx$

(20/100)

(d) Tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} .$$

(20/100)

(e) Dengan menggunakan siri geometri

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} , \quad |x| < 1 ,$$

cari fungsi yang diwakili oleh siri kuasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} , \quad |x| < 1 .$$

(20/100)

- ooo0ooo -