

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MAT 102 – Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Dapatkan had jujukan $\left\{ \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^n \right\}$, jika wujud.

(b) Uji penumpuan siri-siri berikut:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{5^{k+3}}$ (iii) $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2.4.6 \dots (2k)} + \dots$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5}$ (iv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^4}{(\ln 4)^n}$

(c) Cari titik-titik pada sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ yang paling dekat dan paling jauh dari titik (1, 2, 2).

(d) (i) Dengan menggunakan perwakilan siri kuasa yang bersesuaian, cari nilai r dan s yang memberikan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{r}{x^2} + s \right) = 0.$$

(ii) Tunjukkan bahawa $1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{4}.3 + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} + \dots = 4.$

(100 markah)

2. (a) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau tidak.

(i) $\int_0^3 \frac{\sin x}{x^3} dx$

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{4/5} \sqrt{1+x^{4/5}}} dx$

(b) Diberi $f(x, y) = \frac{2x - 2y^2}{3x^2 + 3y^2}$.

Adakah $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud? Jelaskan jawapan anda.

(c) Katakan $r^2 + y + 6 - s^2 = 0$
 $rs + x^2 = -1$.

(i) Dapatkan $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_r$ dan $\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_x$.

(ii) Diketahui $y(x, r) = -\frac{131}{9}$ apabila $x=1$, $r=3$. Dengan menggunakan pembeza seluruh, dapatkan anggaran bagi $y(1.01, 3.02)$ jika y dianggap fungsi tersirat dalam x dan r yang memenuhi persamaan-persamaan di atas.

(d) Buktikan bahawa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n} = \frac{2x^2}{(x-1)^3}$ untuk $|x| > 1$.

(100 markah)

3. (a) Dengan menggunakan kamiran gandatiga dalam koordinat silinder, kirakan isipadu bungkah yang terkandung di antara permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 32$ dan $z = (x^2 + y^2)/4$ yang terletak dalam kawasan $z > 0$.

(b) Katakan $w = f(x, y)$ ialah fungsi terbezakan di mana $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Tunjukkan bahawa

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

(c) Lakarkan setiap rantau kamiran berikut dan seterusnya tukarkan tertib kamirannya.

(i) $\int_2^3 \int_x^{16/x} f(x, y) dy dx$

(ii) $\int_0^{2\sqrt{3}} \int_{y^2/6}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx dy$

(d) Nilaikan $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx$ dengan menggunakan gantian pembolehubah $u = x + y$ dan $v = y - 2x$.

(100 markah)