

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

MAT 102 – Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \sum_{n=5}^{\infty} 8n^{-1.02} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{1.4.7 \cdots (3n+1)} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

- (b) Diberi  $w = e^{4x+5y} \cos 4z$  dengan  $x = \ln t$ ,  $y = \ln(t^2 + 1)$  dan  $z = t$ , cari  $\frac{dw}{dt}$ .

- (c) Cari maksimum dan minimum mutlak bagi  $f$  pada  $D$  jika

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 4y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- (d) Katakan  $u = w(x, y)$  ialah fungsi terbezakan di mana  $x = r \cos \theta$  dan  $y = r \sin \theta$ . Tunjukkan bahawa

$$(w_x)^2 + (w_y)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

(100 markah)

2. (a) Tentukan sama ada  $f$  selanjur pada  $(0, 0)$  jika

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (b) Katakan  $f$  fungsi tertakrif oleh siri kuasa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

untuk semua  $x$ . Buktikan bahawa  $f''(x) = f(x)$ .

- (c) Uji penumpuan kamiran tak wajar berikut dengan ujian-ujian yang bersesuaian.

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{x^{3/2}}{8+x^2} dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

- (d) Nilai kamiran berikut dengan menukarkan tertibnya kepada  $dx dy$ :

$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1}x} e^{\sin y} dy dx.$$

- (e) Diberi  $F(u, v, w) = 0$ . Tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_w \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_v = -1$$

(100 markah)

3. (a) Diberi  $S(x, y, z) = x^2 z^3 - 3yz^2 + x^3 + 2y^{1/2}z$ . Cari pembeza seluruh  $dS$  dan anggarkan perubahan dalam  $S$  jika  $(x, y, z)$  berubah dari  $(1, 4, 2)$  kepada  $(1.02, 3.97, 1.96)$ .

- (b) Dengan menggunakan kamiran gandatiga berkoordinat silinder, kira isipadu bagi satu bungkah  $S$  yang dibatasi oleh permukaan  $z = 6(x^2 + y^2)$  dan  $z = 3$ .

- (c) Cari had-had berikut:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1) - \ln(n+2)]$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e}{n}\right)^{4n}$$

- (d) Dengan menggunakan kembangan siri asas yang telah diketahui, cari siri kuasa bagi fungsi  $f$  berikut di sekitar  $a = 0$ .

$$f(x) = \int_0^{x/2} \frac{\ln(1+s)}{s} ds.$$

- (e) Buktikan bahawa sekiranya  $t = F(r, s, t)$ , maka  $\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_t = -\frac{F_s}{F_r}$  dan  $\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)_r = \frac{F_s}{1 - F_t}$ .

(100 markah)