

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAK291 - Matematik II

Tarikh: 28 Oktober 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari.
(3 jam)

Jawab soalan 1 dan SATU soalan yang lain.

Soalan 1

(a) Tunjukkan bahawa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt[2]{n + 1} \right\} = 0$$

(b) Dapatkan titik-titik pegun bagi permukaan

$$u(x, y) = x^3 + xy + y^2$$

dan tentukan jenis titik-titik ini.

(c) Uji siri berikut untuk penumpuan, serta menyatakan sebarang ujian yang digunakan.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{3^n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^2(n+1)}$

(d) Jika $v = x \log_e (x^2 + y^2) - 2y \arctan \left(\frac{y}{x}\right)$,
dapatkan $\frac{\partial v}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ dan sahkan bahawa

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = v + 2x$$

.../2

(e) Dengan mengembangkan fungsi yang dikamir dalam satu siri kuasa terhadap λ , tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\pi} \cos(\lambda \sin x) dx = \pi \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} - \dots \right\}$$

(f) Nilaikan

$$\iint_R (x + y) dx dy$$

$$R : \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 + x^2, \quad -1 < x < 1\}$$

(g) (i) Buktikan hubungan berikut:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)}, \quad n \text{ integer, } n > 0 \text{ dan } a > 0$$

dengan $\Gamma(x)$ ditakrifkan seperti

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

(ii) Tunjukkan bahawa satu penyelesaian kepada persamaan hipergeometri

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0$$

dengan a, b, c parameter-parameter tetap adalah

$$F(a, b; c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

(70/100)

.../3

2. Cari penyelesaian siri yang lengkap bagi persamaan

$$zw'' + (c - z)w' + aw = 0 \quad \left(' = \frac{d}{dz} \right)$$

dengan c, a bukan nombor-nombor integer.

Tanpa memberi sebarang penyelesaian, terangkan dengan jelas bagaimana kaedah penyelesaian akan berbeza apabila c adalah:

- (i) nombor satu
- (ii) satu integer selain daripada 1.
- (iii) sifar atau satu integer negatif.

(30/100)

3. (i) Dapatkan satu set penyelesaian bagi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

atas $0 \leq t \leq T$ dengan $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = 0$ untuk semua x .
Tunjukkan bahawa penyelesaian yang juga memuaskan

$$\begin{aligned} \phi &= t(T - t) \text{ pada } x = 0 \text{ untuk } 0 < t < T, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \text{ pada } x = 0 \text{ untuk } 0 < t < T \end{aligned}$$

boleh ditulis seperti

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4T^2}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi) \cos \frac{n\pi x}{cT} \sin \frac{n\pi t}{T}$$

(ii) Dapatkan siri sinus Fourier setengah julat bagi fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x/l & , \quad 0 < x < l/2 \\ 0 & , \quad l/2 < x < l \end{cases}$$

sah atas $(0, l)$.

(30/100)