

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
 Peperiksaan Semester Pertama
 Sidang 1987/88
MAK191 - Matematik I

Tarikh: 26 Oktober 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

Jawab ENAM (6) soalan sahaja.

1. (i) Nyatakan syarat supaya matriks A berortogon. Jika

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

tuliskan matriks transposisi. Adakah matriks A satu matriks ortogon? Dengan ini dapatkan songsang bagi matriks A.

(60/100)

(ii) Dapatkan punca-punca kuasa dua bagi penentu

$$\begin{vmatrix} yz - x^2 & zx - y^2 & xy - z^2 \\ zx - y^2 & xy - z^2 & yz - x^2 \\ xy - z^2 & yz - x^2 & zx - y^2 \end{vmatrix}$$

(40/100)

2. (i) Selesaikan persamaan pembezaan berikut:

(a) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos^2 x$; dengan $y=1$ apabila $x=\pi$.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 4e^{3x}$.

(50/100)

(ii) Nilaikan:

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{1 + a^{n+1}} \right)$

(50/100)

3. Jika A, B mewakili set unsur-unsur, takrifkan:

(i) $A \cap B$, persilangan bagi A dan B.

(ii) $A \cup B$, kesatuan bagi A dan B.

Lakarkan gambar-rajah Venn bagi menunjukkan persamaan

(a) $A \cap B = \phi$, set nol

(b) $A \cap B = A$

Kenyataan berikut yang manakah benar untuk sebarang set-set A, B dan C?

(i) $A \cup A = A$

(ii) $A \cap A = A$

(iii) $A \cap B = B \cap A$

(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(v) $(A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$

(100/100)

4. (i) Dengan menggunakan kaedah aruhan, tunjukkan bahawa $5^{2n} - 6n + 8$ boleh dibahagikan dengan 9.

(60/100)

(ii) Jika $a > 1$ dan r, s nombor-nombor rasional dengan $r > s > 0$, tunjukkan bahawa

$r > r > s > 0$

$\frac{a^r - 1}{r} > \frac{a^s - 1}{s}$

(40/100)

5. (i) Buktikan kenyataan-kenyataan berikut:

(a) $\text{Cosh } x > \sinh x$

(b) $\text{Cosh}^2 x - \sinh^2 x = 1$

(c) $\text{arc sinh } x = \log_e \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$

(d) $\frac{d}{dx} \text{arc sinh } x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(e) $\int_0^1 \text{arc sinh } x \, dx = 1 - \sqrt{2} + \log (1 + \sqrt{2})$

(70/100)

(ii) Adakah fungsi berikut genap atau ganjil? Beri alasan.

$f(x) = x|x|$

(30/100)

6. (i) Nilaikan kamiran-kamiran berikut:

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

(b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} \, dx$

(40/100)

(ii) Jika

$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx,$

tunjukkan bahawa, untuk $n \geq 2$

$n I_n = (n - 1)I_{n-2}.$ Dengan ini nilaikan $I_9.$

(60/100)

.../4

7. (i) Pertimbangkan

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma & -\sigma \\ -\sigma & 1 & -\sigma \\ -\sigma & -\sigma & 1 \end{bmatrix} P$$

dengan σ pemalar yang tidak sama dengan $\frac{1}{2}$ atau -1 . Tulis semula hubungan ini untuk memberi P dalam sebutan X.

(60/100)

(ii) Tunjukkan, dengan menggunakan operasi lajur, bahawa $(a + b + c)$ adalah satu faktor bagi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

dan dengan ini faktorkan penentu.

(40/100)

- ooo0ooo -

$$(ii) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leq 2 \\ 4 - 2x & , \quad x > 2 \end{cases} , \quad c = 2.$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & , \quad x \neq 3 \\ 5 & , \quad x = 3 \end{cases} , \quad c = 3.$$

(45/100)

4. (a) Andaikan $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

- (i) Nyatakan domain f,
- (ii) Dapatkan kesemua titik ekstremum tempatan dan tentukan jenisnya.
- (iii) Dapatkan selang f menokok dan menyusut.
- (iv) Cari asimptot mengufuk dan asimptot mencancang bagi graf f, jika wujud.
- (v) Tentukan selang-selang dimana graf f cekung ke bawah dan selang-selang dimana graf f cekung ke atas.
- (vi) Lakarkan graf f.
- (vii) Seterusnya cari luas rantau yang dibatasi oleh graf f, garis $x = -1$, $x = 1$ dan paksi x.

(80/100)

- (b) Nyatakan Teorem Nilai Min bagi Kamiran Tentu. Seterusnya cari nilai z yang memenuhi keputusan teorem di atas untuk

$$\int_1^3 (5x^2 - 3x + 1) dx.$$

(20/100)

5. (a) Apakah yang dimaksudkan dengan f terbezakan pada suatu nombor c?

(10/100)

- (b) Dengan menggunakan takrif terbitan, dapatkan $f'(x)$ bagi

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, untuk $x > 1$,

(ii) $f(x) = |x^2 - 1| + |x|$, untuk $x \neq \pm 1$ dan $x \neq 0$.

(30/100)

.../4

(c) Andaikan $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & , \quad x \geq 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4} & , \quad x < 1 \end{cases}$

(i) Adakah f merupakan fungsi satu dengan satu? Buktikan.

(ii) Bincangkan keselanjaran dan keterbezaan bagi f .

(40/100)

(d) Buktikan bahawa jika fungsi f terbezakan pada c , maka f mestilah selanjar pada c .

(20/100)

- ooo0ooo -