UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAK110 - Kalkulus & Aljabar Linear

Tarikh: 27 Oktober 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 jam)

Jawab LIMA soalan.

1. (a) Selesaikan ketaksamaan

$$|x - 5| < |x + 2|$$

(20/100)

(b) Cari persilangan dua selang berikut:

$$\{x | \ |x - 2| < 3\} \text{ dan } \{x | \ |x - 1| < 4\}$$

(15/100)

(c) Ungkapkan

$$\frac{(i + 1)(i - 8)}{(i + 2)}$$

dalam bentuk a + bi.

(15/100)

(d) Dengan menggunakan pembeza, cari suatu nilai hampiran bagi $\sqrt[3]{26}$.

(10/100)

(e) Cari nilai k supaya garis lurus yang melalui titik (0, 3) dan (5, -2) adalah tangen kepada lengkungan

$$y = \frac{k}{x + 1}$$

(20/100)

(f) Cari nilai a dan b supaya

$$f(x) = \begin{cases} ax + b , & \text{jika} \quad x \leqslant 3 \\ x^3 , & \text{jika} \quad x > 3 \end{cases}$$

terbezakan pada $x = 3$.

(20/100)

2. (a) Bezakan

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} .$$

(15/100)

(b) Cari $\frac{d^2y}{dx^2}$ dalam sebutan x dan y bagi persamaan

$$x^3 + y^3 = 2.$$

(15/100)

(c) Jika $f'(x) = e^{x^2}$ dan $y = f(\sin x)$, cari $\frac{dy}{dx}$.

(20/100)

(d) Tunjukkan bahawa

$$\ell n\ x \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$$

bagi semua $x \geqslant 1$,

(25/100)

(e) Suatu ubat disuntikkan ke dalam arus darah pada masa $t = 0$. Kepekatan ubat ini dalam arus darah pada masa t diberikan oleh

$$p(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t}).$$

Apakah nilai maksimum bagi $p(t)$ dan bilakah ia berlaku?

(25/100)

3. (a) Cari nilai kamiran:

(i) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \quad ,$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\, dx$,

(iv) $\displaystyle\int \sec x \, dx$,

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x}\, dx$,

(50/100)

(b) Diberi

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \pi/4 .$$

Gunakan Petua Trapezium dengan 4 selang untuk mencari nilai hampiran bagi π. Ulangilah dengan menggunakan Petua Simpson (dengan 4 selang).

(30/100)

(c) Cari isipadu bagi bungkah yang dijanakan apabila kawasan yang dibendung oleh

$$y = 2x^2, \quad y = 0 \quad \text{dan} \quad x = 5$$

dikisarkan mengelilingi paksi-x.

(20/100)

4. (a) Nilaikan had-had berikut:

(i) $\displaystyle\text{had}_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

(ii) $\displaystyle\text{had}_{x\to 5} \frac{2 - \sqrt{x - 1}}{x^2 - 25}$

(20/100)

(b) Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu .

(20/100)

(c) Tentukan ketumpuan siri

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 1}$$

(20/100)

(d) Lakarkan graf

$$y = \frac{x(x - 4)}{(x + 4)^2}$$

dan bincangkan sifat-sifat f(x) berikut:

(i) maksimum dan minimum tempatan ,

(ii) titik lengkok balas ,

(iii) asimptot ,

(iv) kecekungan ,

(v) selang menokok dan menyusut.

(40/100)

5. (a) Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan det(A) = 4.

Cari

(i) det $\begin{bmatrix} i & j & k & \ell \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ -4

(ii) $\det \begin{bmatrix} i-k & j & k & \ell \\ a-c & b & c & d \\ e-g & f & g & h \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = A

(iii) $\det \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2i & 2j & 2k & 2\ell \\ 3-a & 3-b & 3-c & 3-d \end{bmatrix}$

(iv) $\det \begin{bmatrix} a & i & e & 1 \\ b & j & f & 1 \\ c & k & g & 1 \\ d & \ell & h & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\det (2A)$

(vi) $\det (2A^{-1})$

(vii) $\det ((2A)^{-1})$.

(40/100)

(b) Andaikan $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Cari penentu A.

(ii) Tanpa menggunakan penentu, cari A^{-1}.

(iii) Cari matriks dampingan A.

(30/100)

(c) Andaikan A matriks nxn. Jika $A^T = A^{-1}$, buktikan bahawa

(i) $|A|$ adalah suatu punca bagi persamaan $x^4 - 1 = 0$, dan

(ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n+1}$.

(30/100)

6. (a) Cari nilai-nilai a supaya sistem persamaan

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 = a$$

(i) tidak mempunyai penyelesaian,

(ii) mempunyai penyelesaian yang unik,

(iii) mempunyai penyelesaian-penyelesaian yang tak terhingga banyaknya, dan

(iv) boleh diselesaikan dengan menggunakan petua Cramer.

(40/100)

(b) Andaikan A matriks nxn. Tunjukkan bahawa

(i) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$,

(ii) adj A tak singular jika A tak singular dan $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$,

(iii) $\text{adj}(\text{adj } A) = A$ jika $|A| = 1$.

(30/100)

(c) Andaikan ω suatu punca bagi persamaan $x^2 + 2x + 4 = 0$.

(i) Cari nilai $\omega^3 - 8$.

(ii) Cari $\begin{vmatrix} 8 & \omega^2 & -2\omega \\ \omega^2 & 8 & \omega^3 \\ -2\omega & \omega^3 & 8 \end{vmatrix}$

(30/100)

- oooOOooo -

136