UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1997/98

September 1997

MAA 111 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) Bagi matriks $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$, a, b dan c adalah nombor-nombor bukan sifar.

Dapatkan A^{-1}.

(15/100)

(b) Katakan F, G dan H adalah matriks baris permulaan 3×3 di mana $F = E_3^1$, $G = E_1(2)$ dan $H = E_3^1(-2)$

(i) Dapatkan F^5, G^9 dan H^5.

(ii) Cari songsang bagi F^5, G^9 dan H^5.

(iii) Jika $F^5 G^9 H = M$, dapatkan M dan M^{-1}.

(30/100)

(c) Tentukan nilai-nilai α dan β supaya sistem persamaan berikut:

(i) mempunyai penyelesaian unik
(ii) mempunyai banyak penyelesaian
(iii) tak konsisten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(30/100)

...2/-

(d) Jika A, B adalah matriks $n \times n$ dan

$$C = \alpha A + \beta B$$
$$D = \Psi A + \delta B$$

di mana α, β, Ψ, δ adalah nombor-nombor nyata yang memenuhi $\alpha\delta \neq \beta\Psi$ buktikan bahawa $CD = DC$ jika dan hanya jika $AB = BA$.

(25/100)

2.(a) Cari nilai-nilai x supaya

$$\text{matriks } A = \begin{bmatrix} x^3 & 3 & 8 \\ x & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ tak singular.}$$

(30/100)

(b) Katakan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dapatkan

(i) pangkat A
(ii) suatu asas bagi ruang nol dari A
(iii) suatu asas bagi ruang lajur dari A

(30/100)

(c) Katakan $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ tak bersandar linear. Tunjukkan bahawa $\{\underline{v}_1, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_3\}$ tak bersandar linear juga.

(20/100)

(d) Katakan V adalah suatu ruang vektor berdimensi n. Jika $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_r\} \subset V$ adalah tak bersandar linear dan $r < n$, buktikan bahawa wujud suatu $T = \{\underline{v}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \cdots, \underline{v}_n\} \subset V$ yang menyebabkan $S \cup T$ menjadi suatu asas bagi V.

(20/100)

3.(a) Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen bagi matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

...3/-

(ii) Dapatkan nilai eigen bagi $[\ (adj\,A)A\ ]^3$.

(iii) Jika suatu matriks B mempunyai nilai eigen yang sama seperti A di atas, adakah vektor eigen bagi B sama dengan vektor eigen bagi A? Berikan alasan.

(40/100)

(b) (i) A dan B adalah matriks $n \times n$ dan $\lambda \neq 0$ adalah suatu nilai eigen bagi AB. Buktikan bahawa λ juga adalah suatu nilai eigen bagi BA.

(ii) Jika A adalah matriks $n \times n$, tunjukkan bahawa $\left(A + AA^T + A^T\right)$ terpenjurukan.

(iii) Matriks A dan B adalah serupa. Jika A terpepenjurukan tunjukkan juga bahawa B terpepenjurukan juga.

(40/100)

(c) Jika A adalah matriks $n \times n$ dan $A^2 = 0$, tunjukkan bahawa $(I + A)$ adalah tak singular.

(20/100)

4.(a) Tunjukkan bahawa

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

adalah suatu asas bagi $\mathbf{R}^3$.

(20/100)

(b) Buktikan bahawa $S = \left\{ A \mid A^T = -A,\ A \text{ matriks } n \times n \right\}$ adalah suatu subruang bagi $M_{n\times n}$.

(25/100)

(c) (i) Jika U dan W adalah subruang bagi ruang vektor V, buktikan bahawa $U \cap W$ dan $U + W$ adalah subruang bagi V.

(ii) Diberi $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \middle|\ x,\ y \in \mathbf{R} \right\}$ dan $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle|\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R} \right\}$

dapatkan suatu asas bagi $(U \cap W)$ dan $(U + W)$.

(40/100)

(d) Jika U dan W adalah subruang bagi $\mathbf{R}^3$ dan $\dim(U) = \dim(W) = 2$, tunjukkan bahawa $U \cap W \neq \{\tilde{0}\}$.

(15/100)

-ooo0ooo-