UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MAA 111 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan in mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Katakan $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ dengan $|A| = 2$ dan A_{ij} menandakan kofaktor bagi a_{ij}. Jika $B = \begin{bmatrix} A_{31} & A_{21} & A_{11} \\ A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ A_{33} & A_{23} & A_{13} \end{bmatrix}$, cari AB.

   (b) Nyatakan nilai yang mungkin untuk $|A|$, jika $A_{3\times 3}$ dengan $A^3 = A$.

   (c) Katakan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Cari suatu matriks tak singular S supaya $SAS^{-1} = D$, D suatu matriks pepenjuru. Juga, dapatkan A^5.

   (d) Jika B serupa dengan A, tunjukkan $B + \alpha I_n$ juga serupa dengan $A + \alpha I_n$.

(100 markah)

2. (a) (i) Cari bentuk eselon baris untuk

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{bmatrix}$$

   (ii) Andaikan A adalah matriks imbuhan untuk suatu sistem $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$. Deduksikan dari bentuk eselon baris terturunnya bahawa sistem tersebut mempunyai penyelesaian yang tak terhingga jika $k=0$. Nyatakan penyelesaian tersebut.

...2/-

(b) Cari suatu asas untuk ruang nol di mana

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Katakan $S = \{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3\}$ di mana $\underset{\sim}{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\underset{\sim}{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Tunjukkan S bersandar linear, juga tahkikkan $L\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3\} = L\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2\}$.

(100 markah)

3. (a) Diberikan $p(x) = -2 - 4x + x^2$, dan $Q = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ di mana

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + 2x^2 + x^3 \\ p_2(x) &= 1 + x + 2x^3 \\ p_3(x) &= -1 - 3x + 4x^2 - 4x^3 \\ p_4(x) &= 1 + 2x - x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Tuliskan $p(x)$ sebagai gabungan linear set Q.

(b) Katakan W adalah subset P_2 dengan

$$W = \{p(x) \in P_2 : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \text{ di mana } a_2 = -a_1 + 2a_0\}.$$

(i) Tunjukkan W adalah suatu subruang dari P_2.

(ii) Nyatakan set yang merentang W.

(c) Nyatakan syarat yang dikehendaki supaya $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ terpepenjurukan.

...3/-

(d) Tentukan sama ada matrik $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ dalam bentuk Jordan. Jelaskan jawapan anda.

(100 markah)

4. (a) Diberikan $A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -14 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Cari semua nilai eigen dan vektor eigen yang sepadan untuk A.

(b) Katakan $q(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$, dan sebarang matriks $H_{n\times n}$, andaikan polinomial matrik $q(H)$, sebagai

$$q(H) = H^3 - 2H^2 - H + 2I_n .$$

Jika λ adalah nilai eigen untuk H, tunjukkan bahawa $q(\lambda)$ adalah nilai eigen untuk matriks $q(H)$. $\left(\textit{Petunjuk}: \ H\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x}\right)$.

(c) Dengan menggunakan matrik A dalam (a) dan juga (b), cari nilai eigen untuk $q(A)$.

(100 markah)

ooo000ooo