

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAA 111 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Katakan  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- (i) Cari polinomial cirian  $A$
- (ii) Cari nilai eigen dan vektor eigen  $A$
- (iii) Tentukan sama ada  $A$  terpepenjuran.

- (b) (i) Katakan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  dengan  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$  adalah polinomial cirian  $A$ . Jika  $A$  tak singular, tunjukkan bahawa
- $$A^{-1} = \frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-2} A + a_{n-1} I_n).$$

- (ii) Katakan  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , cari  $p(A)$  dengan  $p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda + 1$ .

- (c) Jika hasil darab dua matriks simetrik  $A$  dan  $B$  yang sama saiz adalah simetrik, tunjukkan  $AB = BA$ .

(100/100)

2. (a) Tentukan sama ada  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  bersandar atau tak bersandar linear.

Jika bersandar linear, tuliskan salah satu daripada vektor tersebut sebagai gabungan linear vektor-vektor yang lain.

...2/-

(b) Nyatakan sama ada  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  merentang  $R^3$ .

(c) Diberi  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$ .

(i) Tunjukkan  $S$  adalah suatu subruang  $R^3$ .

(ii) Cari asas untuk  $S$  dan tentukan  $\dim(S)$ .

(d) Jika  $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$  merentang ruang vektor  $V$ . Tunjukkan

$\{ \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{n-1} - \underline{v}_n, \underline{v}_n \}$  merentang  $V$ .

(100/100)

3. (a) Cari nilai  $a$  supaya sistem

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

(i) mempunyai penyelesaian unik.

(ii) banyak penyelesaian.

(iii) tiada penyelesaian.

(b) Cari penentu  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$ .

...3/-

- (c) Cari nilai  $x$  dari sistem menggunakan petua Cramer.

$$\begin{aligned}x + y + z - 5 &= 0 \\2x + 3y - z - 1 &= 0 \\x - y + z - 3 &= 0\end{aligned}$$

- (d) Nyatakan sama ada pernyataan berikut benar. Jika benar buktikan dan jika tidak berikan suatu contoh lawan.

“Suatu sistem persamaan homogen mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian.”

(100/100)

4. (a) Diberikan  $A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$ .

- (i) Cari nilai-nilai  $a$  supaya  $A$  tersongsang.
- (ii) Cari  $A^{-1}$  untuk nilai-nilai tersebut.
- (iii) Apakah dimensi ruang nol  $A$  yang bergantung kepada nilai-nilai  $a$  tersebut.
- (iv) Apakah asas ruang lajur  $A$  yang bergantung kepada nilai-nilai  $a$ .

(b) Katakan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in R \right\}$  dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \quad k \in R.$$

Tentukan sama ada  $V$  bersama-sama operasi penambahan dan pendaraban skalar membentuk suatu ruang vektor?

- (c) Jika  $A$  tersongsang dan terpepenjurukan, tunjukkan  $A^{-1}$  juga tersongsang dan terpepenjurukan.
- (d) Cari nilai  $t$  supaya

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3 \\ 4t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3t \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4t \end{pmatrix} \right\} \text{ adalah suatu asas untuk } R^4.$$

(100/100)

- ooo0ooo -