Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-10
Jabatan Matematik, Fakulti Sains, UTM dan Persatuan Sains Matematik Malaysia

SUATU CATATAN TERHADAP RUMUS GANGGUAN (*PERTURBATION*) UNTUK RANTAI MARKOV TERBATAS

[1]Anton Abdulbasah Kamil*
[1]Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia,
11800 USM, Pulau Pinang, Malaysia.
Mel-e : [1]anton@cs.usm.my

Abstrak: Pada catatan ini, dikemukakan suatu pendekatan penyeragaman terhadap rumus gangguan untuk rantai Markov terbatas. Pertama, diberikan bukti ringkas dari rumus gangguan Schweitzer's untuk rantai Markov terbatas yang dapat digunakan untuk kes matrik gangguan dan matrik asal mempunyai kelas berulang tunggal, atau secara am jika kelas berulang dari matrik gangguan dan matrik asal tetap sama. Kedua, fokus ditujukan kepada rumus gangguan yang dibuat oleh Lasserre untuk kes dimana gangguan daripada rantai Markov dengan beberapa kelas berulang merosak struktur kelas rantai markov ke dalam kelas berulang tunggal. Akhirnya pada studi ini dinyatakan bagaimana hasil yang diperolehi dapat diperluaskan kepada kelas yang lebih am untuk matrik tak negatif. Dua contoh berangka diberikan untuk menjelaskan keadaan dan keputusan yang diperoleh.

Katakunci : Rantai Markov, Teori gangguan, Pengemaskinian rumus, Matrik tak negatif.

1 Pengenalan

Rantai Markov dapat digunakan sebagai alat pemodelan berkesan untuk sistem-sistem ekonomi pada amnya. Seperti diketahui bahawa nilai-nilai input daripada parameter-parameter dalam model tersebut biasanya tidak diketahui secara pasti, ini membangkitkan minat untuk lebih mengetahui akibat daripada sedikit ketidakpastian atau ketidaktepatan pada nilai-nilai ini untuk perilaku jangka masa panjang daripada sistem ekonomi yang dipertimbangkan. Oleh itu rumus gangguan untuk kebarangkalian terhad daripada rantai Markov menjadi sangat berguna.

Teori gangguan untuk rantai Markov terbatas telah dipelajari secara sistematik oleh beberapa penulis, seperti Schweitzer (1968), menekankan pentingnya matrik asas untuk teori gangguan dan memperoleh rumus gangguan yang kemudian dikenal dengan rumus gangguan tetap daripada rantai Markov (iaitu jika gangguan mengekalkan keberadaan struktur kelas daripada matrik stokastik yang dipertimbangkan). Selanjutnya Lasserre (1994), memperoleh rumus gangguan yang dikenal sebagai gangguan tunggal (iaitu jika gangguan merosak struktur kelas daripada matrik stokastik yang dipertimbangkan ke dalam kelas berulang tunggal). Beberapa rujukan-rujukan penting lainnya untuk gangguan dan analisis batas kesalahan (*error bound analysis*) daripada rantai Markov adalah kertas kerja Meyer (1980), Funderlic dan Meyer (1986), dan Haviv dan van der Heyden (1984).

Tujuan daripada kertas kerja ini adalah untuk menyeragamkan pendekatan daripada rumus-rumus yang telah diperoleh Lasserre (1994) dan Schweitzer (1968), dan untuk menunjukkan bagaimana hasilnya dapat diperluaskan kepada kelas yang lebih umum daripada matrik-matrik tak negatif. Pada kertas kerja ini diberikan bukti ringkas daripada rumus gangguan Schweitzer untuk kes gangguan-gangguan tetap. Selanjutnya akan dilakukan ubah suai daripada bukti rumus gangguan yang diberikan Lasserre (1994) untuk kes gangguan-gangguan merosak struktur kelas daripada matrik stokastik yang dipertimbangkan untuk kelas berulang tunggal. Akhirnya pada kertas kerja ini akan mengulang kaji semula beberapa kenyataan daripada teori matrik tak negatif dan menunjukkan bahawa setelah dilakukan transformasi sederhana yang sama, hasil gangguan dapat diperluaskan kepada kelas matrik tak negatif yang lebih umum. Dua contoh berangka diberikan untuk menjelaskan kondisi dan hasil yang diperolehi.

2 Rumus Gangguan Untuk Matrik Stokastik

Biar P adalah matrik transisi kebarangkalian (stokastik) n x n (iaitu matrik tak negatif sedemikian sehingga bahawa setiap jumlah daripada barisnya sama dengan satu). Diketahui bahawa had daripada matrik transisi kebarangkalian $P^* = \underset{m\to\infty}{had} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} P^k$ (had Cesaro daripada P) (lihat rujukan [1]) dan $Z = (I - P + P^*)^{-1}$ (matrik asas P) selalu wujud dan memenuhi

$$P^*Z = ZP^* = P^* = P^*P^*,\ (I-P)Z = Z(I-P) = I - P^* \tag{1}$$

(simbol I adalah tempahan untuk matrik identiti daripada dimensi yang sesuai). Selanjutnya, jika matrik P tidak berkala (iaitu jika nilai-nilai eigen P adalah satu dengan modulus sama dengan satu) sehingga $\underset{m\to\infty}{had} P^m = P^*$.

Ingatkan kembali bahawa $PP^* = P^*P = P^* = P^*P^*$. Jika P mempunyai satu kelas berulang, maka baris daripada P^* adalah identik dan sama untuk vektor taburan kebarangkalian stasioner daripada rantai Markov yang dipertimbangkan.

Untuk gangguan-gangguan kecil daripada matrik kebarangkalian transisi P, dalam hal ini dirujuk sebagai matrik asal, dihasilkan kedalam matrik kebarangkalian transisi $\overline{P}$, yang kemudian ditakrifkan sebagai matrik gangguan. Sedangkan P^* dan $\overline{P}^*$ adalah had matrik kebarangkalian transisi daripada matrik asal dan matrik gangguan. Pengamatan akan dilakukan terhadap perbezaan $P^* - \overline{P}^*$, atau kedalam penemuan rumus untuk menghitung $\overline{P}^*$ sebagai fungsi daripada perbezaan $\Delta = \overline{P} - P$ dan tidak ada parameter lain dari gangguan rantai Markov. Perlu diingat bahawa semua kuantiti untuk model gangguan pada kertas kerja ini akan ditunjukkan dengan tanda garis atas, sebagai contoh P, Z (diberi reaksi $\overline{P}, \overline{Z}$) adalah kebarangkalian transisi dan matrik asal, daripada rantai Markov asal (diberi reaksi gangguan)

2.1 Kes Gangguan Tetap

Anggap bahawa matrik asal P dan matrik gangguan $\overline{P}$ keduanya mempunyai kelas berulang tunggal. Pada kes ini baris daripada P^* (sama dengan taburan stasioner dari rantai markov asal) adalah sama, sehingga dapat disimpulkan bahawa :

$$\overline{P}P^* = \overline{P}^*P^* = P^* \tag{2}$$

Setelah dilakukan beberapa manipulasi aljabar, daripada (2) akan diperoleh :

$$\overline{Z}P^* = P^* \Leftrightarrow P^* = \overline{Z}^{-1}P^* \text{ dimana } \overline{Z} = (I - P + P^*)^{-1} \tag{3}$$

dan daripada (1)

$$\overline{P}^*(I - Z) + \overline{P}^*(Z - I + P^*) = P^* \tag{4}$$

dan $PZ = ZP = Z + P^* - I$, $\overline{P}^*\overline{P} = \overline{P}^*$ daripada (3) dapat disimpulkan bahawa

$$\overline{P}^*(I - Z) + \overline{P}^*PZ = P^* \Leftrightarrow \overline{P}^*[I - (\overline{P} - P)Z] = P^* \tag{5}$$

untuk memperoleh rumus eksplisit untuk $\overline{P}^*$ cukup menunjukkan bahawa $I-(\overline{P}-P)Z$ adalah tak singular. Dengan cara yang sama, seperti rumus yang diberikan Schweitzer (1968), diperoleh:

$I-(\overline{P}-P)Z=[Z^{-1}-\overline{P}+P]Z=(I-\overline{P}+P^*)Z=[\overline{Z}^{-1}+P^*-\overline{P}^*]Z=\overline{Z}^{-1}[I+P^*-\overline{P}^*]Z$ menunjukkan

$([I+P^*-\overline{P}^*]^{-1}=I-P^*+\overline{P}^*)$ kewujudan daripada $[I-(\overline{P}-P)Z]^{-1}=Z^{-1}[I-P^*+\overline{P}^*]\overline{Z}$

Dengan menggunakan $\Delta=\overline{P}-P$, daripada (5) akan diperoleh

$$\overline{P}^*=P^*[I-\Delta Z]^{-1} \tag{6}$$

rumus (6) di atas dikenal dengan rumus gangguan seperti yang diperoleh Schweitzer (1968).
Perhatian: Amati bahawa (2) – (5) tetap sah jika P adalah kelas berulangan tunggal. Malangnya, untuk mewujudkan $[I-\Delta Z]$ adalah tak singular, harus menggunakan rumus $P\overline{P}^*=\overline{P}^*$ sah jika $\overline{P}$ hanya mempunyai kelas berulang tunggal.

2.2 Kes Kelas Berulangan Tunggal Daripada Matrik Gangguan

Pada bahagian ini akan ditunjukkan hasil gangguan yang diperoleh Lasserre secara ringkas dan dilakukan sedikit ubah suai ke atas bukti yang diperolehinya. Lebih lanjut dianggap bahawa P mempunyai beberapa kelas berulang, tetapi matrik gangguan $\overline{P}$ mempunyai kelas berulang tunggal. Memandangkan jumlah baris daripada $\overline{P}^*$ adalah sama dengan kesatuan (*unity*), sehingga dapat menentusahkan bahawa $P\overline{P}^*=\overline{P}^*$, $P^*\overline{P}^*=\overline{P}^*$ menunjukkan bahawa

$(I-P+P^*)\overline{P}^*=\overline{P}^*\Leftrightarrow Z\overline{P}^*=\overline{P}^*$ dimana $Z=(I-P+P^*)^{-1}$.

Sekarang amati bahawa : $Z\overline{P}^*=\overline{P}^*\Leftrightarrow Z(I-\overline{P}^*-\overline{Z})+Z\overline{Z}=Z-\overline{P}^*$ dan

(memandangkan $\overline{ZP}=\overline{PZ}=-I+\overline{P}^*+\overline{Z}$, $\quad Z=I+ZP-P^*$)

$-Z\overline{P}\overline{Z}+Z\overline{Z}=Z-\overline{P}^*\Leftrightarrow[I-P^*-Z(\overline{P}-P)]\overline{Z}=Z-\overline{P}^*$

Dengan $\Delta=\overline{P}-P$, diperoleh rumus:

$$[I-P^*-Z\Delta]\overline{Z}=Z-\overline{P}^* \tag{7}$$

dan dengan mendarab (7) oleh P^* diperoleh : (kerana $P^*\overline{P}^*=\overline{P}^*$, $P^*Z=P^*=P^*P^*$)

$$\overline{P}^*-P^*=P^*\Delta\overline{Z} \tag{8}$$

(Rumus (7), (8) telah dibuktikan oleh Lasserre [4], hanya dalam kertas kerja ini digunakan pendekatan yang berbeza dengan bukti yang ditunjukkan oleh Lasserre). Memandangkan $[I-P^*-Z\Delta]$ adalah singular (amati bahawa jumlah lajur dari matrik diatas adalah sama dengan vektor kosong), biarkan E adalah matrik satu dan, dengan cara yang sama seperti ditunjukkan oleh Lasserre, sebagai pengganti (7), pertimbangkan :

$$[I-P^*+\frac{1}{n}E-Z\Delta]\overline{Z}=Z-\overline{P}^*+\frac{1}{n}E\overline{Z} \tag{9}$$

Biar $H=[I-P^*+\frac{1}{n}E-Z\Delta]$ seperti yang telah ditunjukkan oleh Lasserre bahawa H adalah tak singular dan bahawa :

$$He=e,H^{-1}\overline{P}^*=\overline{P}^*,H^{-1}\frac{1}{n}E=\frac{1}{n}E \tag{10}$$

Untuk menentusahkan kenyataan ini, anggap bahawa percanggahan, iaitu biarkan $x \neq 0$ adalah wujud, sedemikian sehingga $(\overline{P}^* + Z\Delta)x = (I + \frac{1}{n}E)x$. Selanjutnya (dengan mendarab (10) oleh $[I - P + P^*]$) sedemikian x harus memenuhi $(I + \frac{1}{n}E)x = \overline{P}x$; anggap bahawa $x_1 = \max_j x_j$ dan dapat dengan mudah disimpulkan bahawa $x_1 = 0$. Dapat dibuktikan $H^{-1}e = e \Leftrightarrow He = e$, memandangkan: $Z\Delta e = 0, \overline{P}^* e = e, \frac{1}{n}Ee = e$. Untuk menentusahkan bahawa $H^{-1}\overline{P}^* = \overline{P}^* \Leftrightarrow H\overline{P}^* = \overline{P}^*$ amati bahawa kerana $\overline{P}$ mempunyai kelas berulang tunggal $P\overline{P}^* = \overline{P}\overline{P}^* = \frac{1}{n}E\overline{P}^* = \overline{P}^*$. Sehingga dapat disimpulkan bahawa:

$H\overline{P}^* = \overline{P}^* - \overline{P}^*\overline{P}^* + \frac{1}{n}E\overline{P}^* - Z\overline{P}\overline{P}^* + Z\overline{P}\overline{P}^* = \overline{P}^*$.

Untuk memperoleh pengemaskinian rumus dalam bentuk yang sama seperti yang ditunjukkan Lasserre [4], memandangkan $P\overline{P}^* = \overline{P}^*, P\frac{1}{n}E = \frac{1}{n}E$ juga $\Delta\overline{P}^* = 0, \Delta\frac{1}{n}E = 0$, dan dari (9) diperoleh:

$$\overline{Z} = H^{-1}Z - \overline{P}^* + \frac{1}{n}E\overline{Z} \Rightarrow \Delta\overline{Z} = \Delta H^{-1}Z \tag{11}$$

masukkan persamaan (11) ke dalam (8), maka diperoleh:

$$\overline{P}^* = P^*(I + \Delta H^{-1}Z) \tag{12}$$

rumus (12) diatas adalah pengemaskinian rumus untuk P^* pada (6).

3 Perluasan Rumusan Gangguan Kepada Matrik Tak Negatif

Sampai saat ini kita membatasi perhatian untuk kes matrik stokastik, iaitu, matrik tak negatif sedemikian setiap jumlah baris dari matrik tersebut adalah sama dengan kesatuan (*unity*). Tetapi telah ditunjukkan bahawa setelah dilakukan transformasi sederhana dengan cara yang sama, hasil yang diperolehi dapat diperluas kepada kelas yang lebih umum dari matrik tak negatif. Untuk itu diperlukan beberapa kenyataan yang berguna daripada teori matrik tak negatif.

Menurut teorem Perron-Frobenius (lihat rujukan [1]), radius spektral, dinyatakan dengan $\rho(.)$, daripada matrik tak negatif M adalah sama dengan nilai eigen positif terbesarnya (dikenal sebagai nilai eigen Perron) dan mencocokkannya dengan vektor eigen kiri, dan vektor eigen kanan (dinyatakan dengan symbol $v(.), u(.)$ dan masing-masing dikenal sebagai vektor eigen Perron kiri, dan vektor eigen Perron kanan) dapat dipilih tak negatif, iaitu:

$$\rho(M)v(M) = v(M)M, \rho(M)u(M) = Mu(M) \tag{13}$$

Pada kes dimana matrik tidak dapat dipecahkan, nilai eigen Perron adalah sederhana/ringkas, vektor eigen Perron adalah unik menaik/meningkat kepada berlipat ganda tetap dan dapat dipilih sebagai positif.

Selanjutnya, jika M dapat dipecahkan, dapat dikatakan kelas M yang tidak dapat dipecahkan adalah asas jika dan hanya jika beberapa dari nilai-nilai eigennya sama dengan ρ, lainnya kelas yang tidak dapat dipecahkan adalah bukan asas (*non basic*). Dapat ditunjukkan (lihat contoh pada [1]) bahawa $u > 0$ jika dan hanya jika :

(i) Setiap kelas asas M adalah tidak mudah masuk kepada sebarang kelas yang tidak dapat dipecahkan lainnya daripada M.

(ii) Setiap kelas bukan asas daripada M adalah mudah masuk kepada paling tidak satu kelas asas daripada M (kemasukan adalah dipertimbangkan pada cara yang sama seperti pada teori rantai Markov).

Terutamanya, setelah perubahan yang sesuai daripada baris dan lajur daripada matrik M yang dapat dipecahkan yang secocok dengan pemasukan pepenjuru tak negatif, yang mana mempunyai vektor eigen kanan u positif tegas (*strictly positive*) dapat dihuraikan dengan cara berikut:

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} M_{(00)} & M_{(01)} & \cdots & M_{(0r)} \\ 0 & M_{(11)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{(rr)} \end{bmatrix} \tag{14}$$

dimana setiap kelas yang tidak dapat dipecahkan daripada $M_{(00)}$ adalah bukan asas, sementara matrik-matrik $M_{(11)},\ldots,M_{(rr)}$ semuanya dapat dipecahkan dan kelas asas daripada M, iaitu:

$$\rho(M_{(00)}) < \rho(M_{(11)}) = \cdots = \rho(M_{(rr)}) = \rho(M) \tag{15}$$

Mengingat bahawa jika M adalah matrik stokastik (iaitu jika setiap jumlah baris adalah sama dengan kesatuan (*unity*) sehingga $\rho(M)=1$ dan kita dapat memilih $u(M)=e$, (e menyatakan vektor unit), maka kelas asas dari M adalah kelas berulang dan kelas bukan asas serupa kepada status sementara daripada matrik stokastik M.

Selanjutnya perhatian ditujukan kepada perluasan daripada rumus gangguan untuk matrik stokastik kepada kelas matrik tak negatif yang lebih umum. Kita nyatakan M sebagai matrik tak negatif asal dan $\overline{M}$ adalah matrik tak negatif gangguan dan buat anggapan umum seperti berikut:

Takrifan GA *Terdapat wujud vektor lajur positif tegas* $u=[u_i]$ *(iaitu* $u_i>0$, *untuk semua* $i=1,2,\ldots,n$*) sedemikian sehingga*

$$Mu = \overline{M}u = u \tag{16}$$

Sekarang biar $U = diag\{u_i\}$. Memandangkan semua u_i adalah positif, U adalah tak singular dan songsangnya wujud, terutamanya, $U^{-1} = diag\{u_i^{-1}\}$. Selanjutnya, daripada (16) dapat disimpulkan bahawa matrik P, $\overline{P}$ memenuhi kondisi:

$$P = U^{-1}MU\,,\ \overline{P} = U^{-1}\overline{M}U \tag{17}$$

adalah matrik stokastik (dengan menggunakan (16) dapat dengan mudah dilihat bahawa setiap jumlah baris dari P, $\overline{P}$ adalah sama dengan kesatuan (*unity*)). Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan dibawah takrifan GA :

$M^* = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}M^k\,,\ \overline{M}^* = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\overline{M}^k$ (had Cesaro daripada M, $\overline{M}$)

dan matrik $Y=(I-M+M^*)^{-1}$, $\overline{Y}=(I-\overline{M}+\overline{M}^*)^{-1}$ wujud dan memenuhi :

$$M^*Y = YM^* = M^* = M^*M^*,\ (I-M)Y = Y(I-M) = I-M^* \tag{18}$$

Dengan menggunakan transformasi yang sama seperti yang diberikan oleh matrik U kepada rumus (6) untuk gangguan tetap daripada rantai Markov, dapat disimpulkan dibawah takrifan GA pengemaskinian rumus menjadi:

$$\overline{M}^* = M^*[I - \Delta Y]^{-1} \tag{19}$$

dimana $\Delta = \overline{M} - M$.

Penjelasan yang sama dapat diperoleh juga dalam kes bentuk gangguan singular (12).

4 Contoh

Pada bahagian ini akan ditunjukkan 2 contoh berangka yang menjelaskan rumus gangguan untuk kedua kes, iaitu jika matrik asas dan matrik gangguan mempunyai kelas berulang tunggal atau paling sedikit satu diantaranya mengandungi lebih dari satu kelas berulang. Contoh ini diambil dari kertas kerja Lasserre [4] dan kertas kerja Schweitzer [6].

Contoh 1:
(Matrik asal mempunyai kelas berulang tunggal, tetapi pernyataan ini tidak harus benar untuk matrik gangguan).

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \overline{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-0.5\lambda & 0.5\lambda \\ 0.5\lambda & 1-0.5\lambda \end{bmatrix}, \text{ dimana } 0 \le \lambda < 1.$$

Jelasnya P mempunyai kelas berulang tunggal, demikian juga benar untuk $\overline{P}(\lambda)$ jika dan hanya jika $0 < \lambda < 1$, tetapi $\overline{P}(\lambda)$ untuk $\lambda = 0$ mempunyai dua kelas berulang. Setelah dilakukan beberapa perhitungan diperoleh (kita ringkaskan $\Delta(\lambda) = \overline{P}(\lambda) - P$) :

$$P^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} 0.5(1-\lambda) & 0.5(\lambda-1) \\ 0.5(\lambda-1) & 0.5(1-\lambda) \end{bmatrix}$$

daripada (6) dapat kita simpulkan untuk $0 < \lambda < 1$:

$$\overline{P}^*(\lambda) = P^*[I - \Delta(\lambda)Z]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5(1+\lambda) & 0.5(1-\lambda) \\ 0.5(1-\lambda) & 0.5(1+\lambda) \end{bmatrix}^{-1}$$

dan $\overline{P}^*(\lambda) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \; 0 < \lambda < 1.$

Malangnya, pendekatan ini tidak berlaku apabila $\lambda = 0$. Memandangkan $[I - \Delta(\lambda)Z]$ adalah singular. Tetapi, jelasnya :

$$\overline{P}^*(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \lambda = 0$$

Contoh 2:

(Matrik asal mempunyai beberapa kelas berulang dan matrik gangguan mempunyai kelas berulang tunggal).

Biar $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\overline{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-0.5\lambda & 0.5\lambda \\ 0.5\lambda & 1-0.5\lambda \end{bmatrix}$, dimana $0 < \lambda \le 1$.

Jelasnya P mempunyai 2 kelas berulang, tetapi setiap $\overline{P}(\lambda)$ untuk $0 < \lambda \le 1$ mempunyai kelas berulang tunggal. Pada kes ini pengemaskinian rumus Schweitzer (6) tidak lagi berlaku, sehingga kita harus menggunakan pengemaskinian rumus Lasserre (12). Untuk menyelesaikan contoh diatas kita harus mewujudkan :

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta\lambda = \begin{bmatrix} -0.5\lambda & 0.5\lambda \\ 0.5\lambda & -0.5\lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan (12) setelah dilakukan perhitungan diperoleh untuk $0 < \lambda \le 1$:

$$H^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0.5+\lambda & -0.5+\lambda \\ -0.5+\lambda & 0.5+\lambda \end{bmatrix}$$

menandakan bahawa :

$$\overline{P}^* = P^*[I + \Delta(\lambda)H^{-1}(\lambda)Z] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Rujukan

1. Berman, A. dan Plemmons, R.J., 1994. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Edisi ke 2, New York: Society for Industrial & Applied Mathematics.
2. Funderlic, R.E. dan Meyer, C.D. Jr., 1986. Sensitivity of the stationary distribution vector for ergodic Markov chain. *Linear Algebra Applic.* **76**: 1 – 17.
3. Haviv, M. dan van der Heyden, L., 1984. Perturbation bounds for the stationery probabilities of a finite Markov chain. *Adv. In Appl. Probab.* **16**: 804 – 818.
4. Lasserre, J.B., 1994. A formula for singular perturbation of Markov chains. *J. Appl. Probab.* **31**: 829 – 833.
5. Meyer, C.D. Jr., 1980. The condition of a finite Markov chain and perturbation bounds for the limiting probabilities. *SIAM J. Alg. Discrete Methods* **1**: 273 – 283.
6. Schweitzer, P.J., 1968. Perturbation theory and finite Markov chains. *J. Appl. Probab.* **5**: 401 – 413.