Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke XI
22-24 Disember 2003, Universiti Malaysia Sabah.

MODEL GARCH DAN JUJUKAN BERSYARAT GAUSS

Anton Abdulbasah Kamil

Pusat Pengajian Sains Matematik,
Universiti Sains Malaysia, 11800 USM, Pulau Pinang
Tel: 04-6533941, Faks: 04-6570910
Mel-e: anton@cs.usm.my

Abstrak

Terdapat suatu hubungan yang erat diantara jujukan GARCH yang sering digunakan dalam model-model ekonometrik dengan proses bersyarat Gauss yang digunakan dalam peramalan dan teori penapisan. Dalam kajian ini ditunjukkan bahawa peraturan-peraturan dalam siri masa dapat berubah terutama jika membandingkan pasangan siri masa yang mempunyai kesan satu dengan yang lainnya.

Katakunci

ARCH, GARCH, aljabar-σ, penapisan, proses piawai Wiener.

1. Pendahuluan

Biar $\{x_n\}$ adalah jujukan rawak yang mempunyai momen kedua terhad, iaitu $E\{x_n^2\} < +\infty$. Sedemikian sehingga jujukan dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan daripada dua komponen

$$x_n = \hat{x}_n + e_n \tag{1}$$

dimana $\hat{x}_n = E\{x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\}$ dan $e_n = x_n - \hat{x}_n$ tidak berkorelasi. Jujukan $\{e_n\}$ adalah jujukan pembaharuan dan $\hat{x}_n$ adalah penganggar terbaik satu tahap kedepan daripada x_n atas asas $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$. Jelas bahawa $E\{e_n\} = 0$.

Dalam praktik, biasanya sangat sukar untuk mendapatkan jujukan pembaharuan dari siri masa sebenar, dikeranakan oleh ketakpegunan. Sehingga diperlukan beberapa pilihan yang dapat dijadikan pengganti yang baik untuk jujukan pembaharuan dalam model kita yang menjelaskan keadaan sebenar. Ini adalah tugas yang sangat penting kerana varians daripada jujukan pembaharuan menujukkan volatiliti dari siri masa asal.

2. Teori

Engle (1992) mencadangkan kelas jujukan rawak yang dapat memainkan peranan dalam pembaharuan. Kelas jujukan rawak ini kemudian lebih dikenal sebagai proses *Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (ARCH). Sebelumnya, Bollerslev (1986) telah membuat pendekatan yang sama secara umum, dan memperkenalkan model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (GARCH).

Takrif Proses GARCH(p,q)

$\{e(t)\}$ adalah ditentukan melalui fungsi taburan bersyarat,

$$e(t) \mid F_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{2}$$

di mana

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2 \tag{2a}$$

dan $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

F_t adalah bahagian aljabar - σ yang menunjukkan semua maklumat pada masa t.

Untuk $p = 0$ proses GARCH(p,q) akan menjadi proses ARCH(q) dan untuk $p = q = 0$ akan diperoleh "*white Gausian noise*".

Pada tahap pertama setiap jujukan GARCH $\{e(t)\}$, secara umum dapat dinyatakan sebagai;

$$e(t) = B(\alpha, t-1, F_{t-1})\xi(t) \tag{3}$$

dimana $B(\alpha, t-1, F_{t-1})$ adalah pembolehubah rawak yang dapat diukur terhadap F_{t-1}, $\xi(t)$ berdistribusi $N(0,1)$ dan α adalah parameter berdimensi terhad. Untuk memeriksa bahawa jujukan tersebut dapat menjadi model jujukan pembaharuan, beberapa syarat seperti $E\{e(t) = 0,$ $E\{e(s)e(t)\} = 0$ untuk $s \neq t$ harus dipenuhi. Jika $\{\xi(t)\}$ saling tak bersandar secara stokastik, pembolehubah rawak $B(\alpha, t-1, F_{t-1})$ menunjukkan darjah volatiliti dari siri masa $\{e(t)\}$, alasan ini dapat diterima untuk $B(\alpha, t-1, F_{t-1}) \geq 0$. Jika kita mempertimbangkan kes masa selanjar, kita akan memperoleh bentuk jujukan pembaharuan seperti berikut:

$$\partial e(t) = B(\alpha, t-1, F_{t-1})\partial w(t) \tag{4}$$

di mana $\partial w(t)$ adalah pembezaan stokastik dari proses piawai Wiener.

Dengan menggunakan bentuk masa diskrit kita mendapatkan siri masa asal $\{x(t)\}$ yang ditunjukkan oleh model,

$$x(t) = A(\theta, t-1, F_{t-1}) + B(\alpha, t-1, F_{t-1})e(t), \tag{5}$$

di mana $A(\theta, t-1, F_{t-1})$ menunjukkan arah (regresi) dan bahagian lainnya adalah jujukan pembaharuan dengan volatiliti diberikan oleh $B(\alpha, t-1, F_{t-1})$. Model ini menjadi bentuk yang lebih umum dari pada model regresi GARCH(p,q) seperti yang di jelaskan oleh Bollerslev (1986). Secara umum θ adalah parameter yang dapat menjadi fungsi dari masa t, sehingga $\{\theta_t\}$ lebih dikenal sebagai pembolehubah eksogen. Jenis model-model seperti ini sangat sering digunakan dalam masalah-masalah penapisan tak linear (*non linear filtration*).

Kes yang sangat penting akan terjadi jika dalam (5), unsur arah $A(\theta, t-1, F_{t-1})$ adalah berasal daripada bentuk linear, katakan;

$$A(\theta, t-1, F_{t-1}) = A_0(t-1, F_{t-1}) + A_1(t-1, F_{t-1})\theta \tag{5a}$$

Dalam kebanyakan kes, parameter θ sebagai fungsi dari masa t, dapat menunjukkan siri masa lainnya yang membawa kesan kepada siri masa $\{x(t)\}$ atau θ dapat lebih dipahami sebagai Bayes dengan fungsi taburan "a priori", yang dapat berubah dalam perjalanan masa. Dengan pendekatan ini kita dapat menelaah pengaruh diantara dua siri masa $\{x(t)\}$ dan $\{\theta(t)\}$.

Jika perkembangan daripada $\{\theta(t)\}$ dijelaskan sebagai,

$$\theta(t+1) = a_0(t,F_t)\theta(t) + b(t,F_t)\varepsilon_1(t+1) \tag{6}$$

dan secara serentak

$$x(t+1) = A_0(t,F_t) + A_1(t,F_t)\theta(t) + B(t,F_t)\varepsilon_2(t+1), \tag{7}$$

dimana $\{\varepsilon_1(t)\},\{\varepsilon_2(t)\}$ adalah "*Gaussian noises*" *N*(0,1) dan saling tak bersandar, sehingga kita mendapatkan sistim yang mendekati persamaan tak linear yang mempunyai sifat yang sangat penting dan menarik.

Biar sistim (6) bermula dengan $t = 0$ sedemikian sehingga $P\{\theta(0) \le \lambda \mid x(0)\}$ adalah Gauss, sehingga fungsi taburan bersyarat menjadi, $P\{\theta(0) \le \lambda_0, \theta(1) \le \lambda_1, \ldots, \theta(t) \le \lambda_t \mid F_t\}$ juga Gauss. Hal ini bermakna bahawa jujukan rawak $\{\theta(t)\}$ berada diantara keduanya, dan dikatakan sebagai jujukan Gauss bersyarat. Sifat ini membolehkan kita untuk memperoleh sistim persamaan yang mendekati sebagai penapis terbaik dan penganggar daripada $\theta(t)$ dengan syarat $\{x(.)\}$ diketahui untuk masa t.

Biar,

$$m(t) = E\{\theta(t) \mid F_t\} \tag{8}$$

$$\partial(t) = E\{\theta^2(t) - m^2(t) \mid F_t\}, \tag{8a}$$

Kemudian terdapat persamaan-persamaan berulang, sedemikian sehingga,

$$m(t+1) = a_0(t,F_t) + a_1(t,F_t)m(t) + (bB + a_1A_1d(t))(B^2 + A_1^2(t))^{-1}(x(t+1) - A_0(t,F_t) \\ - A_1(t,f_t)m(t)) \tag{9}$$

dan

$$\partial(t+1) = (a_1^2\partial(t) + b^2) - [bB + a_1A_1\partial(t)][b^2 + A_1^2\partial(t)]^{-1} \tag{9a}$$

m(t) adalah anggaran daripada $\theta(t)$ dengan $\{x(t), x(t-1), \ldots, x(0)\}$ dan merupakan maklumat terbaik mengenai perilaku $\theta(t)$ untuk $\{x(s), s \le t\}$. Dengan cara yang sama $\partial(t)$ adalah varians bersyarat daripada $\theta(t)$ untuk $\{x(s), s \le t\}$.

Dengan menggunakan *m(t)*, $\partial(t)$, siri masa $\{x(t)\}$ dapat dihuraikan sebagai

$$x(t+1) = A_0(t,F_t) + A_1(t,F_t)m(t) + (B^2(t,F_t) + A_1^2(t,F_t)(t))^{1/2}\bar{\varepsilon}(t+1), \tag{10}$$

dimana $\{\bar{\varepsilon}(t)\} \sim N(0,1)$ adalah jujukan daripada unsur-unsur tak bersandar. Pendekatan ini dapat digunakan untuk menelaah pengaruh daripada satu siri masa terhadap siri masa yang lainnya, jika kita mempunyai maklumat tentang satu siri masa yang pertama dan yang lainnya tidak dapat diamati.

3. Kesimpulan

Jelas bahawa peraturan-peraturan dalam siri masa dapat berubah. Model (6) menjadikan model regresi GARCH(p,q) menjadi lebih umum, jika pembolehubah eksogen $\theta(t)$ adalah rawak dan bermula pada masa $t = 0$ dengan fungsi taburan bersyarat Gauss, sehingga kita dapat menggunakan sistim persamaan tertutup daripada $m(t)$ dan $\partial(t)$ secara berkesan untuk menelaah pengaruh $\{\theta(t)\}$ terhadap $\{x(t)\}$. Pendekatan ini dapat digunakan dalam praktik jika kita ingin membandingkan pasangan siri masa yang mempunyai kesan satu dengan yang lainnya.

Rujukan

[1] Engle, R. 1982, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica.*: **50(4)**: 987 – 1007.

[2] Bollerslev, T. 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics.*: **31**: 307 – 327.